La multiplication implicite de la métamathématique.

Commentaires sur les développements en base entière et la première axiomatique de Tarski.

www.spatialiserlesmaths.org

Adrien Jean-Louis Rousseau

10 juillet 2021

Table des matières

1 Introduction à la multiplication implicite de la métamathématique **1**

2 Exemples **2**

2.1 Développement décimal des nombres 2

2.2 Première axiomatique de Tarski 4

2.3 Modèle des nombres comme des points sur une droite dans un tissu d'espace-temps et téléologie 6

3 Conclusion **7**

Les nombres réels peuvent être définis à l'aide de diverses méthodes et signatures. Tandis que certaines font appel à la multiplication (comme la définition des nombres réels comme un corps archimédien totalement ordonné et complet), d'autres s'en passent (comme la première axiomatique de Tarski). Peut-on définir les nombres réels sans multiplication ? Ce document considère à titre d'exemple la construction des nombres réels avec des développements en base entière et la première axiomatique de Tarski. Une définition implicite de la multiplication dans la logique du premier ordre est considérée pour expliquer son absence apparente dans les deux définitions. Une forme de métamathématique ne s'appuyant pas sur la logique du premier ordre est considérée et fournit un autre regard sur le statut ontologique de la multiplication.

MOTS CLES Logique du premier ordre ; Multiplication implicite ;

1 Introduction à la multiplication implicite de la métamathématique

Considérons l'expression : $\square + \square = \lozenge$ [**1**]. Sous l'interprétation logique usuelle, on a :

— 2 variables : $\square, \lozenge$

— une loi de composition binaire (ou fonction d'arité 2) : $+$

— ainsi que l'égalité : $=$

Ces différents ingrédients décrivent le fait que : $\lozenge$ est la somme "$\square$ plus $\square$".

Sous l'interprétation usuelle de l'addition et de la multiplication, on a également : $\lozenge = 2 \times \square$. Autrement dit, du fait de ses deux emplacements, "$\square + \square$" est une image de la multiplication par 2. Si on suppose que l'expression "$\square + \square = \lozenge$" forme un schéma général (c'est-à-dire qu'on aurait : $\forall \square \exists \lozenge, \square + \square = \lozenge$), alors on peut remplacer $\square$ par $\lozenge$ ($= \square + \square$) dans l'expression [**1**]. On obtient : $(\square + \square) + (\square + \square) = (\square + \square + \square + \square) = (4 \times \square) = \lozenge'$. Par récurrence immédiate, dans le contexte d'une métamathématique autorisant de telles ré-écritures, la loi de composition additive ($\square + \square = \lozenge$) génère les multiples $2^n \square$ (pour tout élément $\square$ et entier n).

De manière plus conséquente, en inversant le sens de lecture et en partant de $\lozenge$, $\square$ est définie comme la moitiée de $\lozenge$. En ajoutant un quantificateur universel pour $\lozenge$ et existentiel pour $\square$[1], l'expression devient récursive. $\square$ pointe récursivement vers une fraction paire quelconque de $\lozenge$ ($\frac{\lozenge}{2^n}$ pour tout élément $\lozenge$ et entier n). La portée de "$\square + \square = \lozenge$" est donc la construction de ce dont il suffit pour décrire les nombres réels en base 2 à partir d'une unité 1... il ne manque qu'un peu d'ordre et de continuité.

1. $\forall \lozenge \exists \square, \square + \square = \lozenge$

Sans jamais parler de multiplication, une métamathématique qui s'appuie sur la logique du premier ordre [2] peut multiplier et diviser librement par 2 du fait de son système d'emplacements. Plus généralement, la logique du premier ordre multiplie et divise implicitement par n du fait des fonctions d'arité n pour tout entier n (par exemple "$\square + \square + \square = \Diamond$" peut être utilisé pour multiplier ou diviser récursivement par 3). On nommera multiplication ou inversion discrète les opérations associées. Quelles sont les conséquences des multiplications discrètes implicites ? Expliquent-elles pourquoi certaines définitions des nombres réels semblent se passer de multiplication ?

2 Exemples

2.1 Développement décimal des nombres

2.1.1 Présentation

Le développement décimal des nombres, qui illustre le cas plus général de développements en base entière, est une représentation idéale pour les imaginer inertes (et sans multiplication). En effet, tous les nombres réels paraissent identifiables sans que l'algèbre rentre en scène. D'abord, il s'agit de se munir de 9 symboles. Ces symboles constituent 9 choix possibles à chaque "étage" d'une suite infinie d'étages. Les étages identifiant un nombre réel peuvent être illimités vers le bas, mais ils commencent à un étage déterminé "au dessus de l'unité".

Choisir un nombre m (la hauteur du plus haut étage au dessus de l'unité), choisir un symbole a_i parmi 9 pour chaque étage i d'une infinité ("plus m") d'étages [3]. Voilà un nombre réel ! (d'après le développement décimal de Simon Stevin)

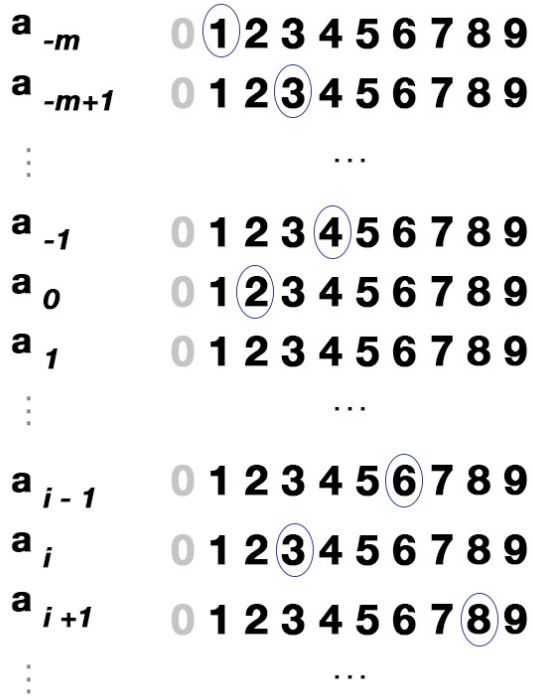

FIGURE 1 – Exemple de développement décimal avec $a_{-m} = 1$, $a_{-m+1} = 3$, (...), $a_{-1} = 4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, (...), $a_{i-1} = 6$, $a_i = 3$; $a_{i+1} = 8$, (...). Un nombre réel est identifié par une telle succession de symboles choisis.

2. cela concerne la logique du second ordre qui s'appuie sur les mêmes bases et autorise les mêmes schémas
3. choisir également le signe du nombre

En choisissant une suite de symboles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>-m}} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^{\mathbb{Z}_{>-m}}$ (et en évitant les choix qui se terminent par une répétition illimitée de 9)[4], un nombre réel et un seul est déterminé[5]. Au premier regard, les développements décimaux promettent une image du continuum des réels débarrassée de beaucoup de superflu (dont la multiplication et plus généralement la caractérisation des règles algébriques vérifiées par les nombres). En y regardant de plus près, le choix des symboles sélectionne quelque chose qui n'est pas vraiment un nombre réel. Considérer l'absence de signification du système suivant sélectionnant des symboles parmi 9 sur une infinité d'étages :

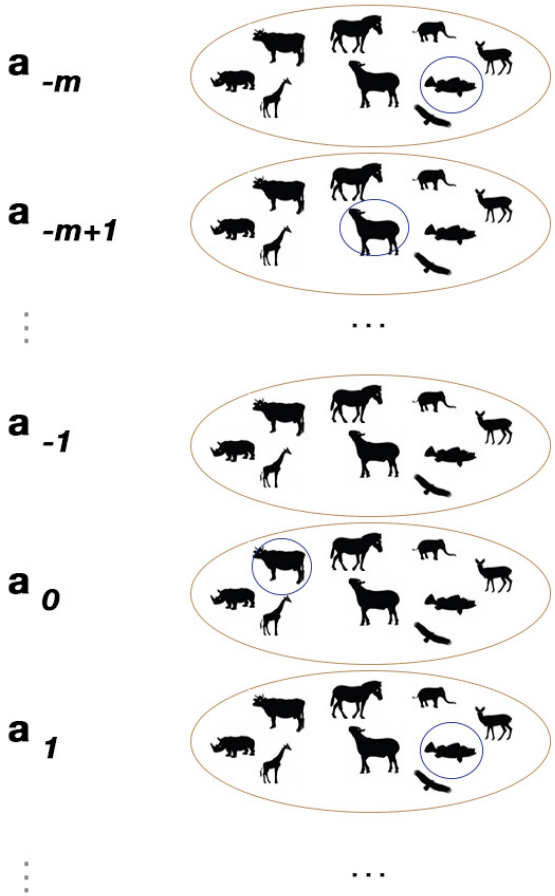

FIGURE 2 – Le choix de symboles parmi 9 sur une "infinité d'étages" ne suffit pas à identifier les nombres réels.

Même si 9 symboles sont choisis tour à tour, difficile de savoir de quoi on parle. Par exemple, pour que les réels ne correspondent qu'à une seule sélection de symboles, faut-il éviter les suites de symboles qui se terminent par une répétition de brebis ou d'aigles ? Le symbole qu'il ne faut pas répéter infiniment n'est pas arbitraire mais est défini spécifiquement par rapport aux autres. D'ailleurs, en considérant ce système d'emplacements et de choix, on peut référer à de multiples objets. Plutôt que de parler des nombres réels $\mathbb{R}$, on pourrait référer à [0,1] ou au plan $\mathbb{R}^2$ par exemple. Réduire un nombre réel à un choix d'une succession de symboles est une abstraction qui oublie l'interprétation implicite de ces derniers. L'interprétation du développement décimal cache-t-elle des régles algébriques et une multiplication ?

4. 0 correspond ici à une absence de choix.
5. l'absence de répétition illimitée de 9 assure réciproquement qu'à tout nombre réel ne corresponde qu'une seule telle suite de symboles

2.1.2 Multiplication implicite (cas du développement décimal)

Pour reconnaître le développement décimal d'un nombre réel, il s'agit d'abord de reconnaître une unité à chaque étage, ainsi que des chiffres successifs. Pour tout étage n du développement décimal, l'interprétation revient à se donner une unité 1(n), ainsi que des chiffres successifs tels que :

$$2(n) = 1(n) + 1(n)$$
$$3(n) = 1(n) + 1(n) + 1(n)$$
$$...$$
$$9(n) = 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n)$$

Les 9 symboles choisis vérifient donc l'algèbre additive des entiers (dont les autres égalités telles que "1(n) + 2(n) = 3(n)").

Par suite, pour tout étage n, le modèle de la retenue impose :

$$1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) + 1(n) = 1(n-1)$$

En d'autres termes, nous retrouvons un modèle d'inversion discrète s'appuyant sur un système d'emplacements. Ce qui est multiplié ou divisé est l'unité 1(0)=1. Plus précisément, les unités $1(n)$ avec n négatif réalisent une multiplication discrète de l'unité 1, tandis que les unités $1(n)$ avec n positif réalisent une inversion discrète de l'unité 1. Pour voir plus clairement que le principe utilisé est le schéma multiplicatif présenté en introduction, considérer qu'en base 2 le modèle de la retenue se simplifie en :

$$1(n) + 1(n) = 1(n-1)$$

Nous retrouvons le schéma $\square + \square = \Diamond$, appliqué récursivement à partir de l'unité 1. Les a_i ou $1(i)$ explicitent où nous en sommes dans la récursion de l'inversion ou de la multiplication.

Ainsi, le développement décimal des nombres constitue une forme avancée et "explosée" du principe d'itération de la multiplication par un système d'emplacements et de réécritures. Le choix des a_i d'un développement décimal est un choix de nombre réel uniquement en acceptant une interprétation qui prévoit la retenue et donc le principe qui vient d'être décrit.

2.1.3 Bénéfices et limites du développement décimal

Succinctement, le gain pédagogique du développement décimal est une appréciation de la cardinalité de l'ensemble des nombres réels, la perte est le flou des opérations algébriques (qui ne s'appliquent de manière spécifique qu'à l'unité seulement) ainsi que le passage au continu.

2.2 Première axiomatique de Tarski

2.2.1 Présentation

Dans les notations qui suivent, x,y,z,t designent des éléments, tandis que X et Y désignent des ensembles.

La définition des nombres réels de la première axiomatique Tarski s'appuie sur une définition forte d'un continuum linéaire.

Axiome 1 $\forall x \forall y (x \neq y) \Rightarrow ((x < y) \vee (y < x)$

Axiome 2 $\forall x \forall y ((x < y) \Rightarrow (y \not< x))$

Axiome 3 $\forall x \forall z \exists y (x < z \Rightarrow ((x < y) \wedge (y < z))$

Axiome 4 $\forall X \forall Y ((\forall x \forall y ((x \in X) \wedge (y \in Y)) \Rightarrow x < y) \Rightarrow \exists z \forall x \forall y ((x \in X) \wedge (y \in Y) \Rightarrow ((x \leq z) \wedge (z \leq y))$

Ce continuum linéaire s'accompagne d'une addition :

Axiome 5 $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + z) + y)$

L'addition garantie l'existence d'un complément additif entre toute paire d'éléments :

Axiome 6 $\forall x \forall y \exists z (x + z = y)$

L'addition est compatible avec l'ordre.

Axiome 7 $\forall x \forall y \forall z \forall t ((x + y) < (z + t) \Rightarrow ((x < z) \vee (y < t)))$

Deux constantes 1 et 1+1 sont définies.

Axiome 8 $1 \in \mathbb{R}$

Axiome 9 $1 < 1 + 1$

Le résultat est le continuum usuel des réels, parcourable usuellement par rapport à l'unité (avec les entiers, les rationnels, etc...). Les axiomes de Tarski se passent-ils bel et bien de multiplication ?

2.2.2 Multiplication implicite (cas de la première axiomatique de Tarski)

D'abord, même si aucune multiplication n'est définie explicitement, l'addition avec ses deux emplacements génère naturellement les multiples. En ce qui concerne l'inversion, même si le schéma "$\forall \Diamond \exists \Box, \Box + \Box = \Diamond$" ne fait pas partie des axiomes de Tarski, une version proche "$\forall \Diamond\ \forall \Box\ \exists \Box', \Box + \Box' = \Diamond$" (axiome 6) réalise toutefois une forme d'inversion discrète.

En effet, plutôt que de générer la moitié de tout élément, l'axiome 6 génère pour tout élément une partie supérieure et une partie inférieure à la moitié de cet élément. Par récursion, l'axiomatique de Tarksi prévoit ainsi naturellement des nombres inférieurs à $\frac{1}{2^n}$ pour tout n entier naturel - une forme de "pseudo inversion discrète" toujours réalisée grâce au système d'emplacements. Une fois que les infinitésimaux rationnels balisent l'infiniment petit autour de 0, les axiomes du continuum remplissent ce qui se trouve entre 0 et 1 (compatiblement avec l'addition). Les sommes réitérées de tout élément non nul quant à elles ne se "perdent pas" mais parcourent bien la droite des réels d'après des arguments s'appuyant sur des bornes supérieures (raisonnement par l'absurde sur le fait que les sommes archimédiennes seraient bornées). La continuité et la compatibilité de l'addition avec l'ordre assurent que tout se positionne comme attendu sur la droite.

Pour comprendre le rôle de la "pseudo inversion discrète", regardons de plus près l'axiome 6 : " $\forall x \forall y \exists z (x + z = y)$ ". Cet axiome prévoit l'existence de 0, de l'opposé, ainsi que d'une pseudo inversion discrète. Qu'aurait-on sans cet axiome ?

2.2.3 Illustration du rôle de la multiplication implicite

Donnons nous une fonction f définie sur les réels positifs telles que :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0.5x + 0.5 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Donnons nous un ensemble M = $[0, +\infty[$ muni de l'ordre usuel et de l'addition $\bigoplus$ telle que : x $\bigoplus$ y = $f^{-1}($ f(x) + f(y) $)$.

Tous les axiomes de Tarski (excepté l'axiome 6) sont vérifiés. En effet, $[0, +\infty[$ est bien un continuum linéaire. De plus, l'addition vérifie bien toutes les propriétés attendues, puisqu'elle se comporte comme l'addition classique des nombres réels sur : f(M) = $\{0\} \cup]0.5, +\infty[$. Manifestement pourtant, aucun élément x ne vérifie x $\bigoplus$ x = 1.

Les axiomes de Tarski sur le continuum et l'addition ne suffisent pas pour retrouver le nombre 0.5 usuel. Même avec une addition compatible avec l'ordre d'un continuum linéaire, sans l'axiome 6 qui réalise une pseudo inversion discrète, rien ne remplit les nombres entre 0 et 1 avec les éléments attendus.

Note : En se donnant seulement 0 et des opposés, l'axiome 6 est obtenu. En effet, soit x et y deux éléments quelconques :

$$(x - x) + y = y$$

$$x + (y - x) = y$$

On vient de trouver $z = (y - x)$ tel que x + z = y. L'axiome 6 est donc vérifié dès qu'on accepte la condition supplémentaire de l'existence de l'opposé.

2.3 Modèle des nombres comme des points sur une droite dans un tissu d'espace-temps et téléologie

Tant qu'il existe une multiplication discrète implicite, la multiplication continue d'un corps archimédien totalement ordonné et complet pourra toujours être considérée comme une redondance logique inessentielle aux nombres. Existe-t-il des langages métamathématiques qui évitent la multiplication discrète implicite ?

Dans le modèle des nombres comme des points dans un tissu d'espace-temps et téléologie, l'addition et la multiplication ne sont pas des objets liés à eux au moyen d'un système d'emplacements. L'addition est l'espace du nombre, la multiplication est le temps du nombre. Les propriétés de ces "dimensions compositionnelles" sont régulées axiomatiquement, conformément à un corps archimédien totalement ordonné et complet.

La discrétisation en deux emplacements est obtenue par interaction des nombres entre eux suivant leurs dimensions compositionnelles. Par exemple, $a + b$ est l'espace de b se joignant à a. $a \times b$ est la durée de b s'appliquant à a. La nature compositionnelle des dimensions s'appuie sur des constantes externalisées dans la métamathématique (à savoir "1" qui correspond à Dieu et "0") constituant des graînes compositionnelles à l'extérieur du domaine des expressions mathématiques usuelles. Parce que tout nombre "est composé" d'addition (ou d'espace), de multiplication (ou de temps) et d'ordre (ou de téléologie), l'interaction des nombres d'après ces dimensions compositionnelles ne fait que caractériser les propriétés d'une addition et d'une multiplication définies sur le continu.

Parce que la logique du premier ordre de ce modèle émerge d'interactions d'objets "constitués" (entre autres) d'une multiplication continue, il n'existe plus de "multiplication discrète implicite" héritée des emplacements de la logique du premier ordre. Plutôt, la multiplication discrète est explicitement discrétisée et intégrée dans la multiplication générale du continuum des nombres réels. La triple nature (téléologisée) des nombres (points, espace, temps) clarifie les différents aspects observés dans la logique du premier ordre. Par exemple, 1 + 1 est à la fois : la position 2 sur la droite ; l'addition de 1 et 1 ; et la multiplication par 2 ($\square + \square$) appliquée à 1.

Le modèle des nombres comme des points dans un tissu d'espace-temps et téléologie est un exemple de modèle immunisé contre la multiplication discrète implicite - et dans lequel la multiplication continue gagne un statut ontologique primaire.

3 Conclusion

Peut-on définir les nombres réels sans multiplication ? Nous avons présenté deux définitions ne la mentionnant pas : la première axiomatique de Tarski et les développements en base entière. À la source de leur succès, une possible multiplication implicite intégrée dans la logique du premier ordre. Dans la métamathématique usuelle, l'addition est une fonction d'arité 2. A l'aide de quantificateurs universels et existentiels, les deux emplacements de variables sommées peuvent être utilisés pour multiplier ou diviser tout nombre par deux [6]. Ce processus de multiplication discrète implicite intervient dans le développement en base entière et dans la première axiomatique de Tarski.

Le développement décimal, qui illustre le cas plus général de développements en base entière, se distingue en ce qu'il "enregistre" et "exporte" la multiplication implicite de la logique du premier ordre dans un large système d'emplacements. Constitué schématiquement de symboles choisis parmi 9 pour chaque étage d'une infinité d'étages, le développement décimal s'appuie sur une interprétation qui multiplie ou inverse l'unité 1 discrètement et récursivement à chaque étage d'après le principe de la retenue. La première axiomatique de Tarski se distingue car son axiome 6 s'appuie sur le système d'emplacements de manière plus indirecte afin d'obtenir une "pseudo inversion" discrète.

Quelles conséquences pour la multiplication des réels ? D'un côté, la multiplication des réels apparaît facultative pour parler des nombres. Par exemple, la première axiomatique de Tarski se contente d'addition, d'ordre et de continuité pour obtenir les nombres réels usuels. D'après un principe d'économie, il conviendrait de concevoir la multiplication non comme une composante fondamentale des nombres, mais plutôt comme une loi de composition utile. D'un autre côté, on pourrait regarder avec suspicion la logique du premier ordre utilisée pour analyser la nature des réels. Si la multiplication continue des réels est facultative pour les définir, c'est sans doute parce que le langage utilisé pour les décrire est muni d'une multiplication discrète implicite. Or, la multiplication discrète se déduit de la multiplication continue aussi bien - et même mieux - que la multiplication continue de la discrète. En témoigne la facilité avec laquelle la première axiomatique de Tarski se déduit de la seconde, mais pas la seconde de la première. La logique du premier ordre intègre implicitement une multiplication plus primitive que celle des réels qu'elle cherche à décrire, une métamathématique qui s'appuie sur la logique du premier ordre est-elle adaptée à la définition des réels ?

Le modèle des nombres réels comme des points sur une droite dans un tissu d'espace-temps et téléologie (Rousseau, 2021) décrit la multiplication générale des réels directement "à l'intérieur des nombres". Dans ce modèle, la multiplication (ou le temps), l'addition (ou l'espace) et l'ordre (ou la téléologie) forment des dimensions compositionnelles constituant les nombres. Configurées pour le continu des nombres réels, les dimensions se discrétisent dans la logique du second ordre en les axiomes d'un corps archimédien totalement ordonné et complet par interaction des nombres entre eux suivant les dimensions correspondantes. Par la nature de sa construction, le modèle évacue toute possibilité de multiplication discrète implicite et fournit une base au statut ontologique primaire de la multiplication. On peut définir les nombres réels "sans multiplication" certes, mais un langage qui leur est adapté la leur rend sans doute volontiers. Tout comme la mécanique quantique discrètise la relativité générale, la logique du premier ordre discrètise la théorie des nombres réels. Ce lien entre le continu et le discret ne doit pas nécessairement favoriser une théorie au devant de l'autre, mais pousse sans doute à s'intéresser à chacune d'elles dans leur domaine d'application. Du point de vue du discret, la multiplication est facultative, du point de vue du continu, le domaine naturel des réels, la multiplication nous paraît fondamentale.

6. Plus généralement, la logique de premier ordre multiplie et divise implicitement par n du fait de l'existence des fonctions d'arité n pour tout entier n.

Sources

- Ressources en ligne (Axiomes des nombres réels -https ://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/Axiomes.pdf ; Diverses définitions des nombres réels - https ://forums.futura-sciences.com/attachments/mathematiques-superieur/402898d1579693121-construction-nombres-reels-reels.pdf)) *pour évaluer certaines définition actuelles des nombres réels*
- Tarski - Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences (1936) *pour la définition de la première axiomatique de Tarski.*
- Adrien Rousseau - Représentation axiomatique des nombres réels (2021) *pour la définition des nombres réels commes des points sur une droite dans un tissu d'espace-temps et téléologie.*