

# Représentation axiomatique des nombres réels.

www.spatialiserlesmaths.org

Adrien Jean-Louis Rousseau

13 mai 2021

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Définition des nombres réels</b>	<b>1</b>
1.1	Définition axiomatique des nombres réels . . . . .	1
1.2	Définition axiomatique modifiée des nombres réels. . . . .	2
<b>2</b>	<b>L'addition (ou l'espace)</b>	<b>5</b>
2.1	La droite . . . . .	5
2.2	L'espace . . . . .	5
<b>3</b>	<b>La multiplication (ou le temps)</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Les signes (ou la téléologie)</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>La topologie (ou la droite)</b>	<b>7</b>
5.1	Propriété d'Archimède . . . . .	7
5.2	Complétude . . . . .	7
5.3	La droite . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>8</b>

*Le principe général guidant notre réflexion, principe dont la lacune constitue sans doute l'erreur des représentations plus naïves des nombres, est qu'on ne peut pas supposer qu'un objet modélise les nombres réels, pour ensuite confirmer avec satisfaction que ce qu'on y met y gagne une nouvelle clarté. Plutôt, il s'agit de se donner un environnement de représentation qui rend possible la représentation des nombres par l'accord de sa structure avec la leur. Partant des axiomes des nombres réels, et les intégrant dans un langage satisfaisant les structures adéquates, nous montrerons comment la droite, comme figure dans un tissu d'espace-temps et téléologie, représente les nombres réels.*

**MOTS CLES** Axiomes des nombres réels ; Représentation des nombres réels comme des points sur une droite dans un tissu d'espace-temps et téléologie.

## 1 Définition des nombres réels

### 1.1 Définition axiomatique des nombres réels

Un nombre réel est défini comme un élément d'un corps archimédien totalement ordonné et complet ( $\mathbb{R}$ ) (à la variation d'axiomes près). Autrement dit,  $\mathbb{R}$  est un ensemble muni de deux lois de compositions internes  $+$  (l'addition),  $\times$  (la multiplication), d'une relation  $\leq$  (la comparaison ou relation d'ordre) - et  $\mathbb{R}$  satisfait les axiomes ci-après :

Les rôles des nombres ajouteurs et ajoutés peuvent être librement permutés ( $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x$  ( + commutative ) ). Les séries d'additions s'évaluent librement comme des additions de termes deux-à-deux ( $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x + (y + z) = (x + y) + z$  ( + associative ) ). Il existe un nombre 0 qui ne change pas le nombre auquel il est ajouté ( $\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$  (existence d'un élément neutre 0 ) ). Tout nombre dispose d'un opposé qui sommé à lui donne l'élément neutre 0 ( $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' = x' + x = 0$  ( existence d'un opposé pour tout élément ) ). Autrement dit,

**Les nombres réels forment un groupe additif (+) abélien.**

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x + (y + z) &= (x + y) + z \text{ ( + associative )} \\ \exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + 0 &= 0 + x = x \text{ (existence d'un élément neutre 0 )} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' &= x' + x = 0 \text{ ( existence d'un opposé pour tout élément )} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2, x + y &= y + x \text{ ( + commutative )} \end{aligned}$$

**Le groupe des nombres est ordonné par une relation d'ordre totale ( $\leq$ ).**

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) &\Rightarrow x = y \text{ ( } \leq \text{ antisymétrique )} \\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) &\Rightarrow x \leq z \text{ ( } \leq \text{ transitive )} \\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, (x \leq y) &\Rightarrow (x + z \leq y + z) \text{ ( } \leq \text{ compatible avec + )} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \leq y) \text{ ou } (y \leq x) &\text{ ( } \leq \text{ totale )} \end{aligned}$$

**Les nombres (privés du nombre 0) forment un groupe multiplicatif ( $\times$ ) abélien.**

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x \times (y \times z) &= (x \times y) \times z \text{ ( } \times \text{ associative )} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \times y &= y \times x \text{ ( } \times \text{ commutative )} \\ \exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 &= 1 \times x = x \text{ ( existence d'un élément neutre 1 différent de 0 )} \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x' \in \mathbb{R}, x \times x' &= x' \times x = 1 \text{ ( existence d'un inverse pour tout élément non nul )} \end{aligned}$$

**Le groupe multiplicatif ( $\times$ ) est compatible avec l'addition (+) et la relation d'ordre ( $\leq$ ), de telle sorte que les nombres forment un corps totalement ordonné.**

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x \times (y + z) &= x \times y + x \times z \text{ ( distributivité de } \times \text{ par rapport à + )} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2, (0 \leq x) \text{ et } (0 \leq y) &\Rightarrow (0 \leq x \times y) \text{ ( } \leq \text{ compatible avec } \times \text{ )} \end{aligned}$$

**Le corps des réels est archimédien et complet.**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (0 < x, 0 \leq y) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{N}, y \leq x \times b) \text{ ( } \mathbb{R} \text{ est archimédien )}$$

$$\begin{aligned} \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > N_0, |x_n - x_{n+p}| \leq \epsilon) \\ \Rightarrow \\ (\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0, |l - x_n| \leq \epsilon) \\ \text{( } \mathbb{R} \text{ est complet )} \end{aligned}$$

## 1.2 Définition axiomatique modifiée des nombres réels.

Du fait de la prééminence de l'espace dans les représentations numériques, retenons aussi la définition des nombres lorsqu'ils sont décomposés en 3 composantes spatiales (extension, direction, signe).

**Les nombres sont munis du signe positif (+), du signe négatif (-) et du signe de 0 (+-).**

$$\text{Soit } \mathbb{S} = \{+, -, +-\}$$

**Les signes sont en relations les uns avec les autres suivant la relation de l'"opposé".**

Soit  $\text{opposé} \in \mathbb{S}^{\mathbb{S}}$  :

$$\text{opposé}(\sigma) = \begin{cases} - & \text{si } \sigma = + \\ + & \text{si } \sigma = - \\ +- & \text{sinon } (\sigma = +- ) \end{cases} \quad (1)$$

**Les signes disposent d'une multiplication ( $\times$ ) .**

Soit  $\times \in \mathbb{S}^{\mathbb{S} \times \mathbb{S}}$  :

$$\sigma \times \sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma' = + \\ \text{opposé}(\sigma) & \text{si } \sigma' = - \\ +- & \text{sinon } (\sigma' = +- ) \end{cases} \quad (2)$$

**Les nombres réels sont munis d'une direction horizontale.**

Soit  $\Theta = \{\theta_1\}$

**Les nombres sont munis d'extensions sur lesquelles sont définies une addition ( $+$ ) et une multiplication ( $\times$ ).**

Soit  $\mathbb{E}$  un ensemble muni d'une loi de composition interne  $\times$  et d'une loi de composition interne  $+$ .

**Les nombres sont définis par les trois composantes (extension, direction, signe).**

Soit  $\mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S}$  où  $\times$  est le produit cartésien

Soient  $\text{extension} \in \mathbb{E}^{\mathbb{T}}$ ,  $\text{direction} \in \Theta^{\mathbb{T}}$ ,  $\text{signe} \in \mathbb{S}^{\mathbb{T}}$  telles que  $\forall t \in \mathbb{T}$ ,  $t = (\text{extension}(t), \text{direction}(t), \text{signe}(t))$

Soit  $\mathbb{R}$  le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S}$  tel que :

**Les extensions forment un monoïde additif commutatif.**

$$\begin{aligned} \exists 0 \in \mathbb{E}, \forall e \in \mathbb{E}, e + 0 = 0 + e = e \\ \forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3, e + (e' + e'') = (e + e') + e'' \\ \forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' = e' + e. \end{aligned}$$

**Le monoïde des extensions est "réci-absorbant" et exhibe une certaine condition d'unicité (deux extensions diffèrent d'une unique extension).**

$$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' = 0 \Rightarrow e = e' = 0 \quad (\text{"réci-absorbance"})$$

$$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists! e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e') \text{ ou } (e' + e'' = e) \quad (\text{"certainne condition d'unicité"})$$

**Les extensions (privées de 0) forment un groupe multiplicatif abélien.**

$$\begin{aligned} \exists 1 \in \mathbb{E}, 1 \neq 0, \forall e \in \mathbb{E}, e \times 1 = e \\ \forall e \in \mathbb{E} \setminus \{0\}, \exists e' \in \mathbb{E}, e \times e' = 1 \\ \forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3, e \times (e' \times e'') = (e \times e') \times e'' \\ \forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e \times e' = e' \times e \end{aligned}$$

**La multiplication est distributive par rapport à l'addition.**

$$\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3, e \times (e' + e'') = (e \times e') + (e \times e'')$$

**Les extensions vérifient la propriété d'archimède et sont complètes.**

$$\forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e' \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = ne'$$

$$\begin{aligned} & \forall (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}} \\ & ( \forall \epsilon \in \mathbb{E} \setminus \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, (\max(e_n, e_{n+p}) - \min(e_n, e_{n+p}) \leq \epsilon) ) \\ \Rightarrow & \\ & ( \exists l \in \mathbb{E}, \forall \epsilon \in \mathbb{E} \setminus \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, (\max(e_n, l) - \min(e_n, l) \leq \epsilon) ) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} & \forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = e'. \\ & \forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e - e' \text{ est défini et égal à } e'' \Leftrightarrow e' + e'' = e. \text{ où } e'' \in \mathbb{E} \\ & \forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \max(e, e') = e \text{ et } \min(e, e') = e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e' + e'' = e \end{aligned}$$

**Le signe posnégatif +- n'est associé qu'à l'extension 0.**

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ extension}(x) = 0 \Leftrightarrow \text{signe}(x) = +-$$

**Les nombres réels s'obtiennent à partir des composantes ainsi :**

$(\mathbb{R}, \oplus, \otimes, \ominus, |\cdot|)$  est un corps totalement ordonné archimédien et complet, où :  
Soient  $x = (e, \theta_1, \sigma), x' = (e', \theta_1, \sigma') \in \mathbb{R}^2$

$$x \oplus x' = \begin{cases} (e + e', \theta_1, \sigma) & \text{si } \sigma =_1 \sigma', \sigma \neq +- \\ (e - e', \theta_1, \sigma) & \text{si } \sigma \neq_1 \sigma', e' \leq e, e' \not\leq e' \\ (e' - e, \theta_1, \sigma') & \text{si } \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \not\leq e \\ (e + e', \theta_1, \sigma') & \text{si } \sigma =_1 \sigma', \sigma = +- \\ (e - e', \theta_1, +- ) & \text{si } \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \leq e \end{cases} \quad (3)$$

$$x \otimes x' = (e \times e', \theta_1, \sigma \times \sigma') \quad (4)$$

$$x \ominus x' \Leftrightarrow \text{signe}(x' \ominus x) =_1 + \quad (5)$$

$$|x| = \text{extension}(x) \quad (6)$$

où :

$=_1$  est une relation définie sur les signes telle que seuls + et - sont distincts.

$\forall x \in \mathbb{R}, -x = (\text{extension}(x), \text{direction}(x), \text{opposé}(\text{signe}(x)))$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, "\oplus (-x)"$  peut être réécrit " $\ominus x$ "

Autrement dit, concernant l'addition (3), ajouter des nombres qui ont le même signe revient à ajouter leur extension (et garder le signe). Ajouter des nombres qui ont des signes opposés "retire" de l'extension au nombre qui a la plus grande extension (en gardant le signe de ce nombre). Si les extensions sont égales et les signes opposés, alors la somme est 0. Concernant la multiplication (4), multiplier des nombres revient à multiplier les extensions et les signes. Concernant la relation d'ordre (5), les nombres se comparent suivant le signe de leur différence. Concernant la topologie (6), la valeur absolue d'un nombre est son extension.

## 2 L'addition (ou l'espace)

### 2.1 La droite

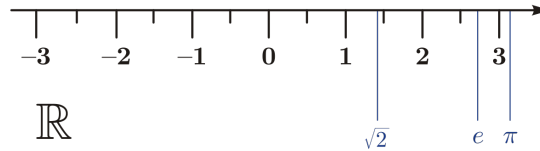


FIGURE 1 – Nombres représentés sur la droite des nombres réels usuelle.

La droite est un objet rectiligne infini constitué de points. La droite ne détermine rien à propos des points (ils appartiennent tous à la droite), mais constitue un support sur lequel les points reproduisent les nombres. Prenons deux points P1, P2 sur la droite. Peut-on ajouter P1 et P2? Malheureusement, l'ajout n'est pas possible. Peut-on multiplier P1 et P2? Malheureusement, la multiplication n'est pas possible. Que reste-il des nombres sur la droite? Passer de P1 à P2 revient à ajouter la différence P2 - P1 à P1. En plus d'être éventuellement compatible avec d'autres structures, la droite permet de se donner des objets définis et identifiés par différence (additive).

Quel langage apporte une structure additive entre les points? La différence additive distribuée entre les points s'interprète comme une certaine longueur (éventuellement orientée selon un certain signe). Une fois que cette longueur prendra sens, les points seront conçus "à une certaine longueur" d'une origine O (à droite ou à gauche suivant le signe). La droite se munira alors d'un point distingué "l'origine O", qui déterminera l'extension des nombres par rapport à l'origine (leur longueur), ainsi que le signe positif (+) à droite, négatif (-) à gauche ou posnégatif(+-) à l'origine O. L'addition en général s'appuie sur ces longueurs et ces signes, et c'est parce que la droite distribue des longueurs entre les points qu'elle est constituée de "différences additives".

### 2.2 L'espace

La structure additive de la droite s'interprète comme une structure d'espace, car elle fait intervenir des longueurs, des signes - ainsi que leur synthèse sous forme de différence additive (analogue à un déplacement entre deux points).

Quelle structure d'espace rend possible la représentation de l'addition sur la droite? Deux extensions peuvent se joindre; deux extensions se joignant définissent une extension ( $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' \in \mathbb{E}$ ). Il existe une extension nulle qui peut être jointe à d'autres sans les modifier ( $\exists 0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}, \forall e \in \mathbb{E}, e + 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}} + e = e$ ). Joindre deux extensions se fait dans un ordre quelconque ( $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' = e' + e$ ). Les extensions sont co-jointes toutes ensemble compatiblement avec toute évaluation de paires d'extensions jointes deux-à-deux; c'est-à-dire que joindre e et e'-jointe-à-e" donne une extension égale à e-jointe-à-e' jointe à e" :  $e + e' + e''$  ( $\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3, e + (e' + e'') = (e + e') + e''$ ). À ces conditions s'ajoutent des conditions plus fortes assurant en outre la possibilité d'addition de nombres de signes différents : deux extensions diffèrent d'une unique extension; autrement dit, pour tout couple d'extensions, il existe une unique extension qui jointe à la première est égale à la seconde ou jointe à la seconde est égale à la première ( $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists ! e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e') \text{ ou } (e' + e'' = e)$ ). De plus, un couple d'extensions dont la première est une partie de la seconde et la seconde une partie de la première est un couple d'extensions égales; ou encore, si la somme de deux extensions est nulle, alors au moins l'une des deux est nulle; ou encore, l'extension nulle est la plus petite extension ( $\forall e, e', \exists e'', e = e' + e'' \text{ et } \exists e''', e + e''' = e' \Rightarrow e = e'$ )  $\Leftrightarrow (\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, (e + e' = 0 \Rightarrow e = 0 \text{ ou } e' = 0)$ ).

L'espace se munit d'une polarité pour représenter non seulement les extensions, mais aussi les signes. Par conséquent, l'espace devient cumulatif (+) ou substractif (-).

### 3 La multiplication (ou le temps)

Deux points P1 et P2 n'ont aucun rapport multiplicatif sur la droite. Au mieux, on peut dire que les différences P2 - 0 et P1 - 0 peuvent être décrites multiplicativement l'une par rapport à l'autre. Autrement dit, sur la droite, la structure multiplicative se distribue entre des longueurs et non entre des points. En ce qui concerne l'addition, les longueurs des nombres fournissent un "chemin" les séparant de l'origine O - ou les séparant de l'autre terme d'une somme. Similairement, la multiplication décrit les propriétés d'un chemin les séparant de l'unité - ou les séparant de l'autre facteur d'un produit. Le chemin multiplicatif est celui de la durée.

Les extensions peuvent jouer le rôle de durées applicables à une autre extension ( $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e \times e' \in \mathbb{E}$ ). Composer des durées se fait dans un ordre quelconque. ( $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e \times e' = e' \times e$ ). Les durées passent toutes ensemble compatiblement avec toute évaluation de paires de durées deux-à-deux ( $\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3, e \times (e' \times e'') = (e \times e') \times e''$ ). Il existe une extension unité (non nulle) dont la durée ne modifie pas les nombres ( $\exists 1_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}, 1_{\mathbb{E}} \neq 0_{\mathbb{E}}, \forall e \in \mathbb{E}, e \times 1_{\mathbb{E}} = 1_{\mathbb{E}} \times e = e$ ). Les durées non nulles sont réversibles ( $\forall e \in \mathbb{E} \setminus \{0\}, \exists e' \in \mathbb{E}, e \times e' = e' \times e = 1$ ). Les durées sont distributives par rapport aux longueurs ( $\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3, e \times (e' + e'') = (e \times e') + (e \times e'')$ ) ("le temps coule dans l'espace").

Le temps se munit d'une polarité pour représenter non seulement les extensions, mais aussi les signes. Par conséquent, la durée devient conservatrice (+), "changeuse de polarité" (-) ou absorbante (+-).

### 4 Les signes (ou la téléologie)

Les nombres sont munis soit du signe positif (+), du signe négatif (-) ou du signe de 0 (+-).

$$\mathbb{S} = \{+, -, +-\}$$

Soient  $x = (e, \theta_1, \sigma), x' = (e', \theta_1, \sigma') \in \mathbb{R}^2$

**L'algèbre additive des nombres fait jouer aux signes le rôle d' "équipes" accumulant leur extension ...**

$$x \oplus x' = \{ (e + e', \theta_1, \sigma) \quad \text{si } \sigma =_1 \sigma', \sigma \neq +- \quad (7)$$

**ou soustrayant les extensions de l' "équipe adverse" ...**

$$x \oplus x' = \begin{cases} (e - e', \theta_1, \sigma) & \text{si } \sigma \neq_1 \sigma', e' \leq e, e \not\leq e' \\ (e' - e, \theta_1, \sigma') & \text{si } \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \not\leq e \end{cases} \quad (8)$$

**avec +- jouant le rôle "d'arbitre neutre".**

$$x \oplus x' = \begin{cases} (e + e', \theta_1, \sigma') & \text{si } \sigma =_1 \sigma', \sigma = +- \\ (e - e', \theta_1, +- ) & \text{si } \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \leq e \end{cases} \quad (9)$$

**L'algèbre multiplicative des nombres fait jouer au signe + le rôle de "conservateur" d'équipe :**

$$\sigma \times \sigma' = \{ \sigma \quad \text{si } \sigma' = + \quad (10)$$

**au signe - le rôle de "changeur d'équipe" :**

$$\sigma \times \sigma' = \{ \text{oppose}(\sigma) \quad \text{si } \sigma' = - \quad (11)$$

**au signe +- le rôle d'absorbeur.**

$$\sigma \times \sigma' = \{ +- \quad \text{sinon } (\sigma' = +- ) \quad (12)$$

Parmi les langages faisant référence à des équipes opposées, rendues actives par la notion de "conservation" ou de "changement d'équipe", et permettant la gradation additive des équipes opposées, le langage des sentiments est adapté. L'amour (+) et la haine (-), en plus de se présenter comme des équipes opposées (dont l'indifférence (+-) serait l'arbitre neutre), disposent d'interprétations actives concordantes. "Aimer (+) l'amour (+) est de l'amour (+)" (  $+ \times + = +$  ). "Aimer (+) la haine (-) est de la haine (-)" (  $+ \times - = -$  ). "Haïr (-) l'amour (+) est de la haine (-)" (  $- \times + = -$  ). "Haïr (-) la haine (-) est de l'amour (+)" (  $- \times - = +$  ). "Être indifférent (+-) à propos de la haine, de l'amour ou de l'indifférence ( $\sigma$ ) est de l'indifférence (+-)" (  $\forall \sigma \in \mathbb{S}, +- \times \sigma = +-$  ). Le langage des sentiments munit également chaque polarité d'une gradation additive (i.e. un plus ou moins grand amour ; une plus ou moins grande haine ; une amour plus ou moins grand qu'une haine ; etc.) tel qu'attendu pour le langage des signes appliqué aux nombres réels.

La dimension "psychologique" des signes, appliquée à la graine de l'espace-temps dont l'image est l'unité (de signe +), s'interprète sous le langage d'une moralité distribuée dans son univers, et donc sous le langage de la théologie ou téléologie. + devient le bien (la conservation), - le mal (le refus) et +- une singularité absorbante.

## 5 La topologie (ou la droite)

### 5.1 Propriété d'Archimède

La propriété d'Archimède constitue au premier abord une clôture additive globale des nombres. Tout nombre est "dépassé par" le chemin emprunté par tout autre lorsqu'il s'ajoute à lui-même.

$$\forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e' \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = ne'$$

En y regardant de plus près, la propriété d'Archimède constitue également une clôture plus locale des nombres. Combinée avec la division en parties égales déduite axiomatiquement de la réversibilité des durées entières<sup>1</sup>, la propriété d'Archimède devient une condition majeure de la possibilité d'une décomposition de tout nombre possible dans une certaine base. Tout nombre n'est pas simplement "dépassé par" le chemin additif emprunté par tout autre, mais tout nombre est identifié d'après un "nombre de pas" déterminé sur une grille de plus en plus fine de rationnels.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists s \in \{0, 1\}, \exists a_0 \in \{0, 1, 2, \dots, 1000, \dots\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \{0, 1, \dots, b-1\}^{\mathbb{N}^*},$$

$$x = (-1)^s \left( a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \dots \right) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

*Pour tout élément  $x$  dans l'ensemble des nombres réels, il existe un signe  $s$ , il existe un entier naturel  $a_0$ , il existe un entier naturel  $b$  supérieur à 1, il existe une suite infinie d'entiers  $a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots$ , - tous compris entre 0 et  $b-1$  - tels que  $x$  soit égal au signe multiplié par la somme des quotients  $a_i$  divisé par  $b$ -à-la-puissance- $i$  lorsque  $i$  parcourt les entiers naturels*

Par la propriété d'Archimède, tout nombre devient infiniment proche d'une suite de nombres rationnels.

### 5.2 Complétude

L'axiome de complétude ferme la définition des nombres réels avec une clôture génératrice locale. Toute suite d'approximations d'extensions, telle qu'une suite d'extensions infiniment proches d'elles-mêmes (suite de Cauchy)<sup>2</sup>, désigne un nombre réel et converge vers ce dernier.

$$\begin{aligned} & \forall (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}} \\ & ( \forall \epsilon \in \mathbb{E} \setminus \{0\}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > N_0, (\max(e_n, e_{n+p}) - \min(e_n, e_{n+p}) \leq \epsilon) ) \\ & \Rightarrow \\ & ( \exists l \in \mathbb{E}, \forall \epsilon \in \mathbb{E} \setminus \{0\}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0, (\max(e_n, l) - \min(e_n, l) \leq \epsilon) ) \end{aligned}$$

1. durées entières elle-mêmes déduites de la condition génératrice globale que toute addition (dont celle de l'unité) est réalisable.

2. les suites prenant la forme de décompositions dans une certaine base constituent des exemples

où :

$$\forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = e'$$

$$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e - e' \text{ est défini et égal à } e'' \Leftrightarrow e' + e'' = e, \text{ où } e'' \in \mathbb{E}$$

$$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \max(e, e') = e \text{ et } \min(e, e') = e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e' + e'' = e$$

### 5.3 La droite

La figure de la droite, illustrant la structure additive non seulement autour de l'origine O, mais aussi autour de tout nombre (par exemple autour de chaque itération d'une somme d'un même nombre), est le terrain idéal de l'imagination de la clôture additive apportée par la propriété d'Archimède. En outre, une fois les rationnels intégrés sur la droite, tout point imaginable sur la droite est enfermé dans des grilles infiniment fines de rationnels. Par suite, tout point sur la droite est en condition d'être un point de convergence d'une suite de rationnels - et donc tout point est un nombre réel par complétude. La figure de la droite, lorsqu'elle est intégrée dans le tissu d'espace-temps et téléologie des nombres, représente la complétude avec l'idée que les nombres réels sont tous les points de cette droite.

## 6 Conclusion

Afin de se donner une représentation axiomatique unifiée des nombres réels, il s'agit de tisser les différentes sections (espace, temps, téléologie et droite) ensemble. Tout nombre réel est désormais un point identifié par la longueur qui le sépare de l'origine et par la durée qui le sépare de l'unité. La longueur et la durée sont deux aspects dynamiques des extensions des nombres. La longueur apporte l'algèbre additive (+) aux extensions sous la forme des propriétés de l'espace tandis que la durée apporte l'algèbre multiplicative ( $\times$ ) sous la forme des propriétés du temps. Les extensions sont réformées par la téléologie qui rend : - les longueurs cumulatrices (bien) ou soustractives (mal) ; - les durées conservatrices (+), "changeuses d'équipe" (-) ou absorbante (+-). La figure de la droite apporte les clôtures additives des nombres réels attendues (propriété d'Archimède et complétude). La droite intègre l'algèbre additive par : - la longueur séparant le point de l'origine O pour les extensions ; - la position du point "à droite" (+), "à gauche" (-) ou "à l'origine" (+-) pour les signes. Comment la droite est-elle intégrée dans l'algèbre multiplicative ? L'unité est arbitraire sur la droite des réels, et la multiplication est obtenue en superposant des droites pour lesquelles la durée de la première est placée au niveau de l'unité de la seconde. Le produit se lit "sur la première droite" au niveau de l'autre durée lue "sur la seconde droite". Le choix arbitraire de l'unité et la possibilité de lier différentes droites avec différentes unités forment les potentiels majeurs de la représentation commune de la droite et de la multiplication. Dans un modèle représentant les nombres réels et donc leur multiplication, les figures de droite sont tissées ensemble par la durée. La relativité du nombre sur une droite par rapport à la droite du dessus - plus fondamentale définissant l'unité - suppose une ascension du chemin multiplicatif jusqu'à un niveau qui possède une unité incontestable. L'unité incontestable, "toute seule", doit évacuer toute addition spatiale qui apporterait une ambiguïté à la définition de l'unité et des nombres. Le tissu de représentation devient génératif en dessous et "à partir" de l'unité, qui doit former une référence absolue. L'unité devient donc "la graine" du tissu d'espace-temps et téléologie, dans lequel tout point dispose d'une durée caractéristique venant de la graine. Au delà de ce rôle de référence, la graine dispose d'une image exacte intégrée dans le corps archimédien totalement ordonné et complet généré d'après elle (le nombre 1). Dans ce modèle, la figure de droite est invariante par multiplication, et tout nombre reste dans un tissu d'espace-temps et téléologie encapsulé dans une figure de droite. Toute longueur d'un nombre est donc interprétée sur la droite des réels, avec une durée qui mène de l'unité à cette longueur. Plusieurs partitions additives de l'espace ou plusieurs durées décomposant multiplicativement un nombre (à travers plusieurs droites liées et hiérarchisées) ne changent pas le lien du nombre à l'origine et à l'unité (voir l'exemple  $2 + 2 = 2 \times 2$  en figure 3). Du fait du langage adapté à la description des nombres, l'unité s'interprète comme "Dieu" (un opérateur-descripteur global (G.O.D.)), le nombre 0 comme une singularité absorbante particulière ("trou noir"), et le nombre 1 comme l'image exacte de Dieu (potentiellement une forme divine réalisée distinguée). Tout nombre en général est un point sur une droite dans un tissu d'espace-temps et téléologie - assurant la représentation des nombres par la représentation de leurs axiomes.



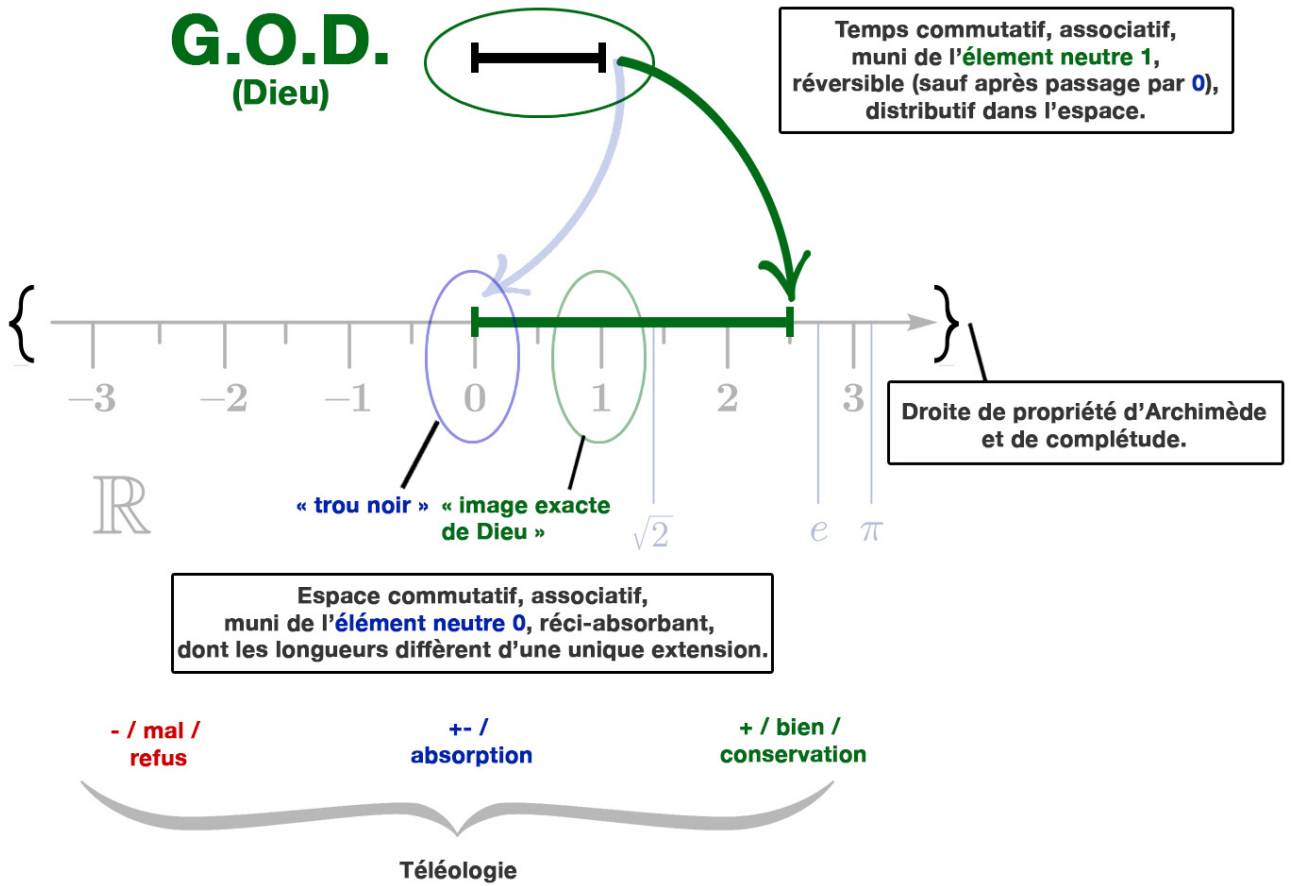


FIGURE 2 – Exemple de nombre positif dans le modèle des nombres réels comme des points sur une droite dans un tissu d'espace-temps et téléologie.

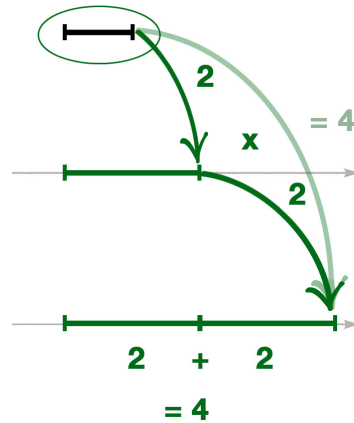


FIGURE 3 – 4 est à la fois une durée par rapport à l'unité et une longueur par rapport à l'origine. 4 peut être décomposé additivement ou multiplicativement conformément aux axiomes des nombres réels.  $2 + 2 = 2 \times 2$ .

## Sources

- Ressources en ligne (Axiomes des nombres réels -<https://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/Axiomes.pdf>; construction des nombres réels et équivalence à isomorphisme près : <https://www.lpsm.paris/pageperso/roux/enseignements/1213/capes/reels.pdf>); Histoire des mathématiques (The Mathematical Experience, Philip J. Davis and Reuben Hersh, 1981). Magazine (numéro 59, "La droite", Tangente); Vidéos (3Blue1Brown, Euler's formula with introductory group theory.) *pour évaluer la définition actuelle des nombres réels*
- Christopher Langan - Cognitive-Theoretic Model of the Universe (2002) *pour la définition référencée de G.O.D.*
- Adrien Rousseau - Spatialiser l'analyse réelle (2020) *pour la définition axiomatique modifiée des nombres réels.*