Essai sur la construction des nombres complexes

www.spatialiserlesmaths.org

Adrien Jean-Louis Rousseau

19 septembre 2020

Table des matières

Toutes choses étant égales par ailleurs, tandis que les nombres réels $\mathbb{R}$ ont une direction fixée $\theta_{\mathbb{R}}$ (l'horizontale), les nombres complexes $\mathbb{C}$ ont une direction libre dans le plan. À partir d'une telle définition, les propriétés usuelles des nombres complexes sont déduites. Ce document étend "Spatialiser l'analyse réelle".

MOTS CLES Nombres complexes ; Représentation des nombres complexes comme Espace-Temps et Théologie.

1 Brève histoire de la connectivité en philosophie

Afin de mettre en contexte mes deux travaux *Spatialiser l'analyse réelle* et *Essai sur la construction des nombres complexes*, j'aimerais dresser une perspective sur la période philosophique dans laquelle nous nous trouvons. Par connectivité, j'entends l'identification d'une forme de communication entre différents domaines du réel. La première connectivité joyeuse fut introduite par Platon. En faisant le lien entre la connaissance générale (les Idées) et le particulier (les objets sensibles), Platon rendit le monde entier intelligible par la connaissance. En outre, le monde des Idées sépara l'âme du corps, suscitant l'espoir d'une récompense inestimable et éternelle pour le connaisseur. En faisant le lien entre l'inanimé (Matière) et l'animé (Forme), Aristote donna au monde entier des principes d'organisations et d'évolutions vers des fins. Par ses syllogismes, les connaissances générales sont de plus enveloppées de manière cohérente dans la logique. La foi chrétienne cristallisera une théorie de l'humain connaissant l'ordre supra-sensible et les fins du monde. L'homme chrétien est alors plongé dans une réalité exhaustive et connectée. À mesure que la raison et l'intelligence humaine se développaient, la foi dut néanmoins se rendre compatible avec les oeuvres de la raison. En témoigne Saint Thomas d'Aquin, présentant ses preuves de Dieu pour fortifier les révélations. Viennent les architectes de la raison humaine. Descartes et Kant font naître l'homme Dieu. Pour Descartes, l'homme sait par ses lumières naturelles. L'homme est esprit et contrôle le corps. Pour Kant, toute la réalité perçue et connue est humaine (le temps et l'espace sont déterminés a priori dans l'homme). Dans les deux cas, l'homme est le connecteur de la réalité et son terrain de jeu est l'univers extérieur qu'il connecte à lui. L'extérieur est le monde mécanique et régulier pour Descartes ; le monde restreint aux phénomènes empiriques pour Kant. Ni Descartes ni Kant ne rejettent un Dieu transcendant. Descartes fait reposer ses connaissances sur un Dieu bienveillant, Kant espère que Dieu récompensera la morale rationelle bien appliquée. Pourtant, la forteresse du royaume du Dieu chrétien avait cédée lorsque toute la réalité s'était retrouvée connectée dans l'homme. Ultime décideur du réel, capable de reconnaître Dieu ou non, l'homme se déclare à travers Nietzsche maître des valeurs. Viennent les fossoyeurs du réel. L'homme ne connaît à travers la méthode scientifique de Popper que des théories de la réalité. Démuni de lumières naturelles et confiantes, l'homme explore son terrain de jeu à sa surface. De plus, le développement des sciences cognitives laisse l'homme se concevoir comme mécanisé. Illusoire le libre arbitre, les couleurs ou la conscience - voilà ce que proclame par exemple Daniel Dennett [1]. Agrégat d'optimisations biologiques et sociales (par les gènes puis les mèmes), le cerveau est compris comme un système de traitement d'information limité et hasardeux - peut être sera-t-il remplacé par un être en silicone plus heureux et intelligent ? La connexion de la réalité devient l'illusion d'un cerveau dénigré - équivalent à tout au simple degré de complexité près. En philosophie, après Dieu, c'est l'homme qui meurt. Vient le *Cognitive-Theoretic Model of the Universe*. Plutôt que d'utiliser les sciences cognitives pour nier l'homme, Langan les utilise pour réinterpréter l'univers. Langan s'interroge sur la réalité et fait de la connectivité son objet d'étude. Tout ce qui est réel est en unisection avec tout ce qui est réel, c'est-à-dire qu'il existe un medium commun qui assure leur interaction. La matière et l'esprit de Descartes, les phénomènes et les noumènes de Kant, l'observation scientifique et l'observateur - ces dualismes doivent interagir au sein d'un médium qui garantie leur connexion et pleine intelligibilité. L'unisection mène Langan au telesis, un médium irréductible et suffisant d'info-cognition. La réalité devient un langage constitué d'info-cognitions (couplage état/syntaxe) dont un Global Operator Descriptor (G.O.D.) assure la connexion et communication. La connectivité de la réalité, plutôt que d'être réalisée en l'homme comme le pensait Kant ou Descartes, plutôt que d'être réalisée dans le système mécanisé d'information externe à l'homme comme le pense Daniel Dennett, est réalisée en Dieu qui plonge à la fois la syntaxe des lois physiques générales et à la fois les syntaxes humaines en lui. Puisque Dieu "est de retour", la réalité est connaissable du fait des règles par lesquels les objets se reconnaissent et évoluent au sein de Dieu. Puisque l'homme conçoit Dieu et sa création - revient la question de ce que Dieu attend de l'homme.

Mes essais sur les mathématiques connectent : - l'espace pur d'Euclide, Kant et Schopenhauer ; - les nombres tels qu'ils sont définis de manière moderne et formelle. Mes objets sont à la fois état et syntaxe - rassemblés dans un objet général. La relation du général au particulier est celle que : - le nombre général se distribue (descriptivement) à l'intérieur de tous les nombres particuliers ; - les nombres particuliers se distribuent (topologiquement) à l'intérieur du nombre général. Tout comme le SCSPL (Self-Configuring Self-Processing Language) est le médium général de la réalité distribué dans ses objets, le nombre général est le médium commun à tous les nombres. Autre ressemblance avec le CTMU, lorsque je tombe sur des analogies théologiques je les mentionne car elles paraissent, pour les raisons indiquées plus tôt, de bon ton.

1. Consciousness Explained, *Daniel Denett* (1991)

2 Rappel sur les nombres réels

2.1 Définition axiomatique des nombres réels

Soit $\mathbb{S} = \{+, -, +-\}$
Soit opposé $\in \mathbb{S}^{\mathbb{S}}$:

$$oppose(\sigma) = \begin{cases} - & \text{si} & \sigma = + \\ + & \text{si} & \sigma = - \\ +- & \text{sinon} & (\sigma = +-) \end{cases} \tag{1}$$

Soit $\times \in \mathbb{S}^{\mathbb{S}\times\mathbb{S}}$:

$$\sigma \times \sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si} & \sigma' = + \\ oppose(\sigma) & \text{si} & \sigma' = - \\ +- & \text{sinon} & (\sigma' = +-) \end{cases} \tag{2}$$

Soit $\Theta = \{\theta_1\}$
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $\times$ et d'une loi de (co-)composition interne $+$.
Soit $\mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S}$ où $\times$ est le produit cartésien
Soient extension $\in \mathbb{E}^{\mathbb{T}}$, direction $\in \Theta^{\mathbb{T}}$, signe $\in \mathbb{S}^{T}$ telles que $\forall t \in \mathbb{T}$, $t = (extension(t), direction(t), signe(t))$
Soit $\mathbb{R}$ le plus grand sous ensemble de $\mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S}$ tel que :
$\exists 0 \in \mathbb{E}, \forall e \in \mathbb{E}, e + 0 = 0 + e = e$
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' = 0 \Rightarrow e = e' = 0$ *(a.k.a. "réci-absorbance")*
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2$, $e + e' = e' + e$.
$\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3$, $e + (e' + e'') = (e + e') + e''$.
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e \times e' = e' \times e$
$\exists 1 \in \mathbb{E}, 1 \neq 0, \forall e \in \mathbb{E}, e \times 1 = e$
$\forall e \in \mathbb{E}\backslash\{0\}, \exists e' \in \mathbb{E}, e \times e' = 1$
$\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3$, $e \times (e' \times e'') = (e \times e') \times e''$.
$\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3$, $e \times (e' + e'') = (e \times e') + (e \times e'')$.
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists! e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)$ *(a.k.a. "certaine condition d'unicité")*
$\forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e' \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = ne'$

$\forall (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$
$(\ \forall \epsilon \in \mathbb{E}\backslash\{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, (max(e_n, e_{n+p}) - min(e_n, e_{n+p}) \leq \epsilon))$
$\Rightarrow$
$(\ \exists l \in \mathbb{E},\ \forall \epsilon \in \mathbb{E}\backslash\{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, (max(e_n, l) - min(e_n, l) \leq \epsilon))$

(ou encore plus tard :)

$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$(\ \forall \epsilon \in \mathbb{E}\backslash\{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, extension(x_n \ominus x_{n+p}) \leq \epsilon))$
$\Rightarrow$
$(\ \exists l \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon \in \mathbb{E}\backslash\{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, extension(l \ominus x_n)) \leq \epsilon)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ extension(x) = 0 $\Leftrightarrow$ signe(x) = +-

où :
$\forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = e'.$; $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e - e'$ est défini et égal à e" $\Leftrightarrow e' + e'' = e$. où $e'' \in \mathbb{E}$;
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2$, max(e,e') = e et min(e,e') = e' $\Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e' + e'' = e$

Théorème ($\mathbb{R}$,$\oplus$,$\otimes$,$\oslash$,|.|) est un corps totalement ordonné archimédien et complet, où :
Soient $x = (e, \theta_1, \sigma), x' = (e', \theta_1, \sigma') \in \mathbb{R}^2$

$$x \oplus x' = \begin{cases} (e + e', \theta_1, \sigma) & \text{si} & \sigma =_1 \sigma', \sigma \neq +- \\ (e - e', \theta_1, \sigma) & \text{si} & \sigma \neq_1 \sigma', e' \leq e, e \nleq e' \\ (e' - e, \theta_1, \sigma') & \text{si} & \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \nleq e \\ (e + e', \theta_1, \sigma') & \text{si} & \sigma =_1 \sigma', \sigma = +- \\ (e - e', \theta_1, +-) & \text{si} & \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \leq e \end{cases} \tag{3}$$

$$x \otimes x' = (e \times e', \theta_1, \sigma \times \sigma') \tag{4}$$

$$x \olessthan x' \Leftrightarrow signe(x' \ominus x) =_1 + \tag{5}$$

$$|x| = extension(x) \tag{6}$$

où :
$=_1$ est une relation définie sur les signes telle que seuls + et - sont distincts.
$\forall x \in \mathbb{R}$, -x = (extension(x),direction(x), opposé(signe(x)) et $\forall x \in \mathbb{R}$, "$\oplus$ (- x)" peut être réécrit "$\ominus$x"

Propriété ($\mathbb{R}$,$\oplus$,$\otimes$,$\olessthan$,|.|) contient un objet équivalent à la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$.

où $\mathbb{D}$ se munit d'une distance d, telle que : d(x,y) = extension(p(x)(y)) = | y $\ominus$ x |.

$$\begin{array}{rcll} p(points) & : & \mathbb{R} & \rightarrow \quad Imp \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ & & x & \mapsto \quad \begin{array}{rcll} p(x) & : & \mathbb{R} & \rightarrow \quad Imp(x) \subset \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto \quad (extension(y \ominus x), \theta 1, signe(y \ominus x)) \end{array} \end{array} \tag{7}$$

2.2 Langage des nombres réels

Equation de dé-dualisation (ou couplage Espace-Temps)

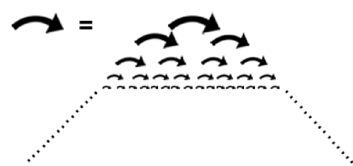

FIGURE 1 – Le nombre est munit d'une forme d'équivalence objet-état/objet-transition.

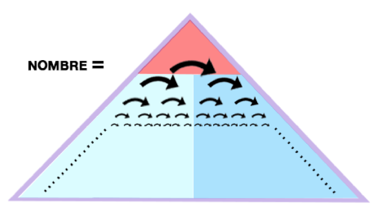

FIGURE 2 – Le nombre *(la pyramide totale en violet)*; Le nombre-multiplié *(la pyramide gauche en bleu clair)*; le nombre-multiplié-fois-multiplieur *(la pyramide droite en bleu foncé)*; Le nombre-multiplieur *(la pyramide en rouge)*; tous ces nombres ont des structures identiques grâce à l'équation de dé-dualisation.

La pyramide pose le potentiel multiplicatif des nombres. Chaque pyramide impose récursivement la règle que la pyramide de gauche fois le multiplieur est égale à la pyramide de droite. Un nombre est une structure multiplicative autosimilaire récursive munie d'une équation de dé-dualisation.

Parce que les deux termes d'une addition multiplient la même unité, parce qu'il le font dans un ordre indifférent et en se distribuant les multiplications, alors la dualité (additionné/additionneur) est résolue en co-additionnant les nombres à l'intérieur d'une multiplication. L'addition s'intègre orthogonalement dans la multiplication :

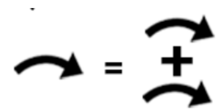

FIGURE 3 – Les nombres peuvent se co-additionner orthogonalement à la multiplication.

La multiplication des nombres entre eux est obtenue par composition des nombres :

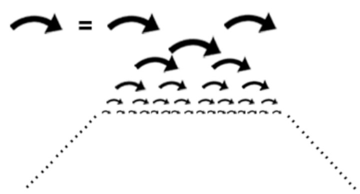

FIGURE 4 – Les nombres peuvent se composer en passant par une "unité temporaire", c'est-à-dire que les nombres peuvent se multiplier.

La distributivité est alors décrite comme suit :

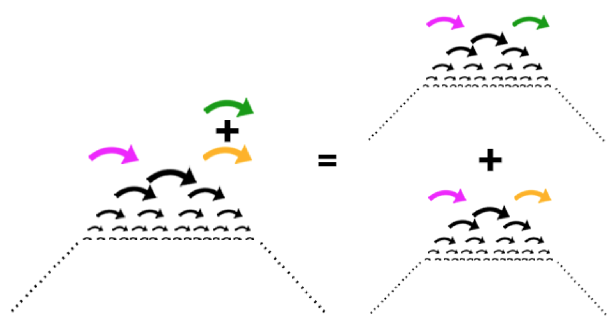

FIGURE 5 – La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Le nombre reste multiplicatif à partition orthogonale en termes additifs près. Par analogie, le nombre est un Temps unitaire d'une grammaire transformant l'espace. L'addition représente une partition (cumulative ou substractive) d'Espace. La distributivité correspond au fait que le temps "coule uniformément" dans l'espace.

$\otimes$ (Interprétation détaillée de la multiplication) Soient x, x' $\in \mathbb{R}^2$. $x \otimes x' = (e \times e', \theta_1, \sigma \times \sigma')$. On en déduit :

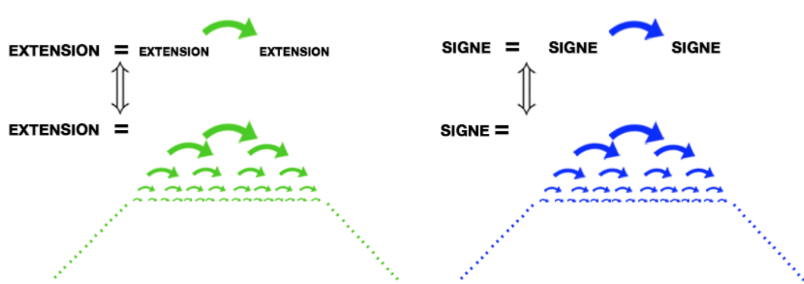

FIGURE 6 – Les extensions et signes sont multiplicatifs.

L'addition des extensions donne :

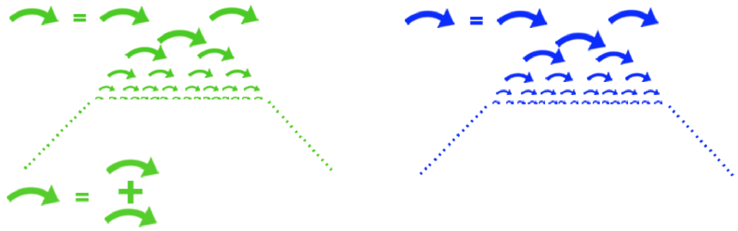

FIGURE 7 – Les extensions et les signes peuvent se composer. Les extensions se co-additionnent orthogonalement à la multiplication.

Par analogie théologique, le signe **+** correspond : - au Bien (théologie de la relation d'ordre) ; - à l'existence (théologie appliquée à la partition de l'espace) ; - à la conservation (théologie appliquée au temps). Le signe **-** correspond : - au Mal (théologie de la relation d'ordre), - à l'anti-existence (théologie appliquée à la partition de l'espace) ; - à la destruction (théologie appliquée au temps). Le signe **+-** correspond à : - l'absortion. La loi de co-addition $+$ correspond à : - la jointure d'extension ; - la partition cumulative ou substractive d'espace. La loi de composition $\times$ correspond à : - l'application du temps unitaire de l'extension ; - l'application du temps unitaire (conservateur, destructeur ou absorbant) du nombre. **0** correspond à : - l'Unbounded Telesis ; - la frontière entre Bien et Mal. **1** correspond à : - Dieu ; - l'image temporelle de Dieu (unité positive) ; - la potentialisation (rétroactive) de Dieu comme tous les Biens possibles ($t \mapsto tan(t\frac{\Pi}{2})(]0,1[) =]0,+\infty[$ [2] et Bien suprême ($+\infty$) (l'infini positif). Tout nombre possède un Temps propre transformant l'unité spatiale (couplée à l'identité) en Espace propre. La droite est l'image des nombres réels.

3 Nombres complexes

Notons $\mathbb{C}$ les nombres complexes.

Définition des nombres complexes Toutes choses étant égales par ailleurs, tandis que les nombres réels $\mathbb{R}$ ont une direction fixée $\theta_{\mathbb{R}}$ (l'horizontale), les nombres complexes $\mathbb{C}$ ont une direction libre dans le plan.

Quelles sont les conséquences de cette définition ? Les nombres étant multiplicatifs - commençons par décrire la multiplication.

3.1 Multiplication des nombres complexes

3.1.1 Définition de la multiplication des nombres complexes

Multiplication des nombres complexes Soient x, x' $\in \mathbb{C}^2$.

$x \otimes x' = (e \times e',\ \theta \times \theta', \sigma \times \sigma')$.

Les directions du plan rejoignent les extensions et signes dans ce qui est multiplié.

3.1.2 Interprétation

Résumons ce que nous savons des différentes composantes :

Composante	Nature	Transformation associée	Constante
Extension	Rapport de longueur	Absorption dans l'origine	Extension 0
		Homothétie	Extension 1
Signe	Rapport à l'Origine	Absorption dans l'origine	Signe +-
		Symétrie par rapport à l'origine	Signe +
Direction	Rapport entre direction	Absorption dans l'origine	Direction θ_{+-}
		Rotation	Direction $\theta_{\mathbb{R}}$

2. La relation entre Dieu et $]0,+\infty[$ est interprétée plus précisement comme la distribution de l'unité dans tous les points de la droite. L'unité est déterminée rétroactivement par sélection d'une unité spatiale (couplage d'un Espace avec le Temps unité). L'unité correspond à : - une détermination d'espace particulière ; - la droite infinie invariante par changement d'unité.

Par analogie aux autres composantes, les directions sont interprétées comme des rapports entre directions. Les directions distinguées sont la rotation neutre $\theta_{\mathbb{R}}$ et la direction nulle θ_{+-}. Les directions sont multiplicatives (i.e. multiplicatives autosimilaires récursives munies d'une équation de dé-dualisation).

Déduction de l'existence des imaginaires La bissectrice entre la demi-droite des positifs et des négatifs se multiplie elle-même vers la demi-droite des négatifs (car la bissectrice est la demi-rotation pour mener des positifs au négatif). Dès lors, il existe un axe des "imaginaires" dont le carré est les nombres réels négatifs. En prenant un nombre d'extension unité 1, nous avons i et -i sur l'axe des imaginaires avec : $i^2 = -1$

3.1.3 Partition de la multiplication

Dans $\mathbb{R}$, les nombres et extensions sont partitionables orthogonalement à la multiplication.

Partitionneur	Partitionné	Type	Constante	Interprétation
$+$	Extension	"Orthogonale"	Extension 0	Jointure
$\oplus$	(extension,$\theta_{\mathbb{R}}$, Signe)	"Orthogonale et composée"	(0,$\theta_{\mathbb{R}}$, +-)	Transfert de point

où point est une fonction qui redistribue l'origine arbitrairement sur la droite des réels :

$$p(points) \;:\; \mathbb{R} \to Imp \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \qquad x \mapsto \begin{array}{rcl} p(x) : \mathbb{R} & \to & Imp(x) \subset \mathbb{R} \\ y & \mapsto & (extension(y \ominus x), \theta_{\mathbb{R}}, signe(y \ominus x)) \end{array}$$

Par extension naturelle, dans $\mathbb{C}$, nous souhaitons :

Partitionneur	Partionné	Type	Constante	Interprétation
$+$	Extension	"Orthogonale"	Extension 0	Jointure
$\oplus_{\mathbb{C}}$	(extension,direction, Signe)	"Orthogonale et composée"	(0,$\theta_{\mathbb{R}}$, +-)	Transfert de point

où point est une fonction qui redistribue l'origine arbitrairement dans le plan complexe :

$$p(points) \;:\; \mathbb{C} \to Imp \subset \mathbb{C}^{\mathbb{C}}, \qquad x \mapsto \begin{array}{rcl} p(x) : \mathbb{C} & \to & Imp(x) \subset \mathbb{C} \\ y & \mapsto & (extension(y \ominus_{\mathbb{C}} x), direction(y \ominus_{\mathbb{C}} x), signe(y \ominus_{\mathbb{C}} x)) \end{array}$$

3.2 Addition des nombres complexes

3.2.1 Perte des doubles tours

Lorsque la droite des nombres réels pivote librement autour de l'origine, les nombres portés par les points réalisent divers tours. Pourtant, les nombres complexes n'emportent pas l'information de "plusieurs tours", mais se restreignent plutôt à un tour. Comment expliquer une telle limitation ?

D'abord, la rotation est naturelle dans l'espace. Dans *Des Fondements de la Géométrie* (1898), Poincaré présente les sous-groupes rotatifs (déduits de solides en rotation) avant les sous-groupes translatifs. Même si on admet comme Poincaré que l'Espace-Temps contient naturellement la rotation, celle-ci n'est pas limitée. Empiriquement, même si un solide reprend la même place après un tour complet, le simple tour et le double tour est une transformation différente pour le solide. Comment expliquer la limitation de l'identité des nombres complexes aux rotations de moins d'un tour ?

Aristote, dans le traité *On the Heavens*, sépare le monde en deux. Le monde sublunaire (ou Terrestre) soumis au changement dont les mouvements sont rectilignes. Le monde supralunaire (ou Céleste) éternel et parfait, dont les mouvements sont circulaires. Pareillement, l'élégance nous pousse à voir en la rotation des nombres complexes le mouvement associé à un cercle. En faisant tourner l'unité 1 rectiligne d'Est en Ouest et vers le haut (comme le soleil), l'unité parcours $[0,\pi[$ avant de rencontrer ce qui sera le symétrique de l'unité. Pour se "créer à partir de rien", Dieu arrête son chemin circulaire à π et crée le temps. Dans le temps, le cercle complet existe et est séparé avec le Bien en haut, et le Mal en bas. Dans cet univers des nombres complexes, le temps a changé. Le nombre positif (+) (associé à un temps de conservation sur la droite des nombres réels) ne conserve pas toujours le Bien (+). En effet, un nombre positif sur le cercle (choisi différent de l'unité), peut finir par atterrir dans les négatifs en itérant sa rotation positive associée. Parce que le temps ne conserve plus le signe, le temps a changé. Le temps n'est plus le temps Terreste réservé aux droites, mais le temps Céleste. Autrement dit, le cercle est séparé en Paradis (Demi-Plan supérieur), et Enfer (Demi-plan inférieur). En multipliant les nombres dans ce nouvel espace, le temps Terrestre est remplacé par le temps Céleste. Parce que Dieu Bon est l'unité 1, seul Dieu reste éternellement et inconditionnellement au Paradis. Les images temporelles de Dieu (Secondary Telor) sont imparfaites et s'éloignent de Dieu. A chacune de leur mort, les images temporelles de Dieu reviennent au Paradis et sont jugées. Créées à l'image de Dieu, elles parcourent le cercle d'Est en Ouest en espérant que Dieu ne les fassent jamais dépasser π. Si une image diverge hors du Paradis, elle tombe dans l'Enfer et le jugement est final (absence de double tour).

Voilà un essai sur la théologie des nombres complexes. Il ne s'agit pas simplement de différencier statiquement le haut et le bas, mais d'expliquer pourquoi la transformation rotative est restreinte. Chacun jugera l'esthétique de ce qui a été proposé. La partie Céleste des nombres explique l'absence de double tour dans l'identité des nombres. La partie Terreste n'est pas limitée à un tour mais admet les cycles jours/nuits éternels. Plutôt que d'être limitée à $[0, \pi[$ et son symétrique, la partie Terrestre enroule la droite des nombres réels $\mathbb{D}$ entière sur le cercle (en plaçant le 0 de la droite enroulée au niveau de l'unité de la droite des nombres horizontale). Couplage Terre-Cieux, les nombres complexes ont des directions enroulées infiniment autour du cercle, mais regardées modulo 2π (la longueur d'un tour complet sur le cercle unité).

Les nombres complexes se distribuent dans $(t \mapsto tan(t\frac{\pi}{2}))(D(0, \pi))$ (le plan généré par le demi-disque unité D(0,π) symétrisé par le Mal). Les nombres complexes admettent un signe constant $+_{\mathbb{C}}$.

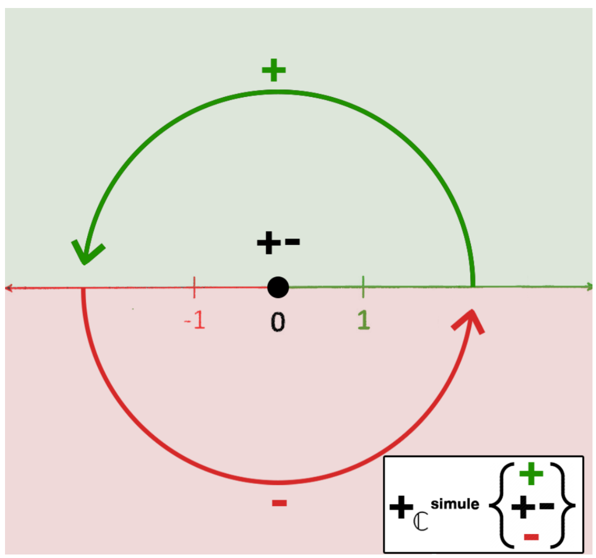

Figure 8 – Le signe des nombres complexes $+_{\mathbb{C}}$ simule : le signe + *(en vert)*, correspondant au demi-plan supérieur contenant la demi-droite des nombres réels positifs ; le signe - *(en rouge)*, correspondant au demi-plan inférieur contenant la demi-droite des nombres réels négatifs ; le signe +- *(en noir)*, correspondant au signe absorbant de l'origine. Le signe des droites (dynamique) est simulé sur chaque droite passant par l'origine O. Sur chaque telle droite : le signe + correspond (dynamiquement) à l'ajout de 0π direction ; le signe - à l'ajout de $+\pi$ direction ; le signe +- au passage à la direction nulle θ_{+-}. Les directions sont les composantes des nombres complexes qui supportent la simulation.

Direction des nombres complexes Les directions sont identifiées par des longueurs d'arcs du cercle unité. L'absence de double tour nous fait regarder les directions modulo 2π

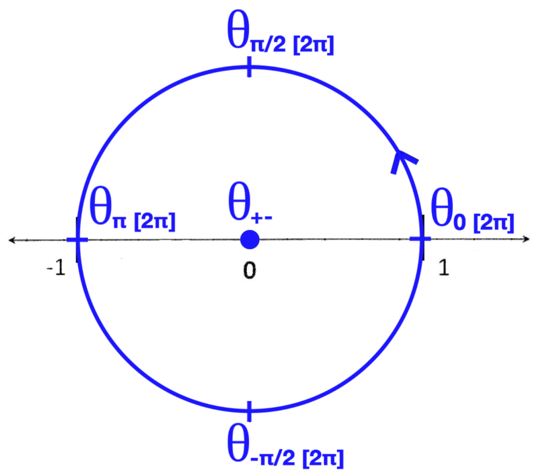

FIGURE 9 – Les directions non-nulles des nombres complexes sont repérées par la longueur de l'arc du cercle unité. Afin d'identifier les rotations de plus d'un tour de différence, la longueur est regardée modulo 2π (soit la longueur de l'arc d'un tour complet). Autrement dit, $\theta_{0[2\pi]} = \theta_{2\pi[2\pi]}$; $\theta_{\frac{\pi}{2}[2\pi]} = \theta_{\frac{-3\pi}{2}[2\pi]}$; $\theta_{\pi[2\pi]} = \theta_{-\pi}[2\pi]$; $\theta_{\frac{3\pi}{2}[2\pi]} = \theta_{-\frac{\pi}{2}[2\pi]}$ etc... plus généralement, $\theta_{d[2\pi]} = \theta_{d+2k\pi[2\pi]}$ $\forall d \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ (nombres entiers relatifs).

Nous disposons maintenant d'une convention pour repérer toutes les directions. Soit la direction est θ_{+-}, soit la direction est repérée par la longueur de l'arc du cercle unité correspondante. Il existe un réel entre 0 et 2π ($d \in [0, 2\pi[$) tel qu'une direction non-nulle est identifiée par d. Lorsque les nombres complexes se composent, les nombres réels de leurs directions s'ajoutent.

Conséquences : Soient x, x' $\in \mathbb{C}^2$.

$$x \otimes x' = (e \times e', \theta \times \theta', +_{\mathbb{C}} \times +_{\mathbb{C}}) = (e \times e', \theta \times \theta', +_{\mathbb{C}}) = \begin{cases} (e \times e', \theta_{d+d'[2\pi]}, +_{\mathbb{C}}) & \text{si} \quad \theta \neq \theta_{+-} \text{ et } \theta' \neq \theta_{+-} \\ (e \times e', \quad \theta_{+-} \quad, +_{\mathbb{C}}) & \text{si} \quad \theta = \theta_{+-} \text{ ou } \theta' = \theta_{+-} \end{cases} \tag{7}$$

3.2.2 Partie réelle et partie imaginaire

Les nombres particuliers (les points du plan) sont topologiquement inclus dans le nombre général ($(t \mapsto tan(t\frac{\pi}{2}))(D(0,\pi))$ (le plan généré par le demi-disque unité D(0,π) symétrisé). Réciproquement, le nombre général est inclu descriptivement dans tous les nombres. Incidemment, il y a une forme de relativité de la représentation suivant l'origine, la direction initiale ou l'unité de longueur choisie (chaque nombre particulier peut générer le plan) [3].

L'addition $\bigoplus_{\mathbb{R}}$ partitionnait (cumulativement ou susbtractivement) l'espace. La partition correspondait sur la droite des réels à un transfert de point - transfert associé à une forme de relativité de l'origine O. Similairement, $\bigoplus_{\mathbb{C}}$ partitionne l'espace en transférant les points dans le plan. Lorsque la direction est fixée, le transfert de point est identique à celui de $\mathbb{R}$. Les nombres complexes ajoutent des extensions et font se compenser les signes opposées sur une droite passant par l'origine. Que se passe-t-il lorsque les directions des nombres complexes sommés sont distinctes ?

L'addition de deux nombres complexes qui ont des directions distinctes se considère dans un espace vectoriel euclidien à deux dimensions - sous une forme algébrique plus commode. Atteignons la forme commode après quelques réflexions qui la mettent en contexte. Le but est de remarquer que la forme algébrique n'est pas nécessairement une donnée essentielle des nombres complexes, mais peut être comprise comme une écriture pratique.

3. La possibilité de création du général à partir de n'importe quel particulier illustre la distribution du général dans le particulier. Autrement dit, il y a appartenance de l'ensemble à l'élément symétriquement à l'appartenance de l'élément à l'ensemble. La possibilité de création du général à partir de tout particulier vient de l'invariance des groupes considérés (plan homogène et isotrope) et n'est pas une condition nécessaire de toutes les relations entre général et particulier. Par analogie, dans le *Cognitive-Theoretic Model of the Universe* (CTMU), l'univers est simulé dans chaque objet (particule ou homme par exemple), tout comme les objets sont topologiquement inclus dans l'univers (et communiquent au sein de ce dernier).

Décomposition des nombres complexes en somme de deux nombres sur deux directions données Lorsque les nombres complexes sont regardés comme des sommes de deux nombres complexes dont les termes sont sur deux directions données θ_1 et θ_2, alors l'addition des nombres complexes est triviale.

Soient $z_1, z_1', z_2, z_2' \in \mathbb{C}^4$ tels que direction(z_1) = direction $(z_1$') = θ_1 et direction(z_2) = direction $(z_2$') = θ_2.
$(z_1 \bigoplus_{\mathbb{C}} z_2) \bigoplus_{\mathbb{C}} (z_1' \bigoplus_{\mathbb{C}} z_2')$ = (extension(z_1) + extension(z_1'), direction (z_1), $+_{\mathbb{C}}$) $\bigoplus_{\mathbb{C}}$ (extension(z_2) + extension(z_2'), direction (z_2), $+_{\mathbb{C}}$) = $(z_1'' \bigoplus_{\mathbb{C}} z_2'')$

avec direction$(z_1'') = \theta_1$ et direction$(z_2'') = \theta_2$. Autrement dit, l'écriture est stable par addition $\bigoplus_{\mathbb{C}}$ (car le résultat reste une somme de deux nombres complexes de directions respectives θ_1 et θ_2). De plus, l'addition est commode (il suffit d'ajouter sur chacune des directions les extensions respectives)

Plus généralement, en prenant deux droites données : (où $=_{[\pi]}$ signifie une égalité large qui autorise la direction opposée ou nulle).

Soient $z_1, z_1', z_2, z_2' \in (\mathbb{C})^4$ tels que direction$(z_1) =_{[\pi]}$ direction $(z_1$'$) =_{[\pi]} \theta_1$ et direction$(z_2) =_{[\pi]}$ direction $(z_2$'$) =_{[\pi]} \theta_2$.
$(z_1 \bigoplus_{\mathbb{C}} z_2) \bigoplus_{\mathbb{C}} (z_1' \bigoplus_{\mathbb{C}} z_2') =_{[\pi]}$ (extension$(z_1 \bigoplus_{\theta_1} z_1')$, direction (z_1), +) $\bigoplus_{\mathbb{C}}$ (extension$(z_2 \bigoplus_{\theta_2} z_2')$, direction (z_2), +) $=_{[\pi]} (z_1'' \bigoplus_{\mathbb{C}} z_2'')$

avec direction$(z_1'') =_{[\pi]} \theta_1$, direction$(z_2'') =_{[\pi]} \theta_2$ et $\bigoplus_{\theta_i}$ l'addition sur la droite de direction θ_i. Autrement dit, l'écriture est stable par addition $\bigoplus_{\mathbb{C}}$. L'addition est de nouveau commode (il suffit d'ajouter, sur chacune des directions indépendemment, les nombres comme sur la droite des nombres réels)

$\Rightarrow$ Écrire les nombres complexes comme une somme de deux termes sur deux directions données donne une représentation des nombres complexes stable-additivement et simplificatrice.

Cas de deux directions données distinctes Parce que les nombres complexes s'intègrent dans le plan (qui est un espace à deux dimensions), lorsque θ_1 et θ_2 sont deux directions distinctes ($\theta_1 \neq_{[\pi]} \theta_2$) , alors la représentation des nombres complexes comme des sommes de deux termes sur ces deux directions est universelle et unique.

Partie réelle et partie imaginaire Une infinité de couples de directions (θ_1,θ_2)s peuvent être choisis pour obtenir une représentation des nombres complexes universelle, unique, commode et stable pour l'addition $\bigoplus_{\mathbb{C}}$. Il serait bien d'en isoler certains biens choisis. Puisque les nombres sont multiplicatifs, quels sont les couples de directions qui rendent la représentation stable pour la multiplication $\otimes$?

Soit Θ l'ensemble des directions distinctes obtenues par multiplication des termes entre eux. Si $\theta_{d[2\pi]} \in \Theta$, alors $\theta_{kd[2\pi]} \in \Theta \ \forall k \in \mathbb{Z}$ (par multiplication réitérée d'un nombre sur cette direction). Le problème de délimiter les ensembles de directions stables est ramené au problème d'ensembles d'entiers stables pour l'addition dans de l'arithmétique modulaire. On en déduit que les ensembles Θ (finis) qui conviennent sont des sous-groupes cycliques d'un certain $2\pi\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ de la forme : $\Theta(q) = \{\theta_{2\pi.\frac{1}{q}[2\pi]}, \theta_{2\pi.\frac{2}{q}[2\pi]}, \dots, \theta_{2\pi.\frac{q}{q}[2\pi]}\ \}$, avec q entier naturel. [4]

Pour que les additions $\bigoplus_{\theta_i}$ soient comme l'addition des nombres réels sur $\theta_{\mathbb{R}}$ (avec ses négatifs et ses positifs), alors il faut que les directions et leurs opposées soient dans l'ensemble Θ. Le nombre de directions (q) doit donc être pair. En conclusion, pour obtenir une représentation des nombres complexes comme des sommes de nombres sur des directions déterminées (stables par multiplication), il suffit de choisir un ensemble de q directions $\Theta(q)$ sélectionnant $\frac{q}{2}$ droites. Pour avoir une représentation unique des nombres complexes, nous devons choisir q = 4 (puisque les nombres varient dans le plan qui est à 2 dimensions). Notre solution

4. Si $\theta_{x2\pi[2\pi]} \in \Theta$, avec x irrationnel, alors Θ est infini. Sinon, soit un rationnel r tel que $\theta_{r2\pi[2\pi]=\frac{p}{q}*2\pi[2\pi]} \in \Theta$, avec p et q premiers entre eux. L'identité de Bézout donne qu'il existe un entier n tel que np $\equiv$ 1 [q], ce qui prouve que le plus petit ensemble stable parcourt tous les $\frac{1}{q}\pi$, ..., $\frac{q}{q}2\pi$ avec un certain q. Plus généralement, soit q=pgcd(q_i) avec q_i les dénominateurs des différentes directions de Θ. Les directions de Θ sont dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (en ommetant le 2π). Quel est le sous-ensemble stable de ces directions quelconques ? Un sous-ensemble (fini) stable par addition de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est toujours un sous-groupe de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Par théorème de Lagrange, le sous-groupe de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est engendré par <d> un diviseur de q. Dès lors, l'ensemble stable prend la forme attendue $\frac{1}{q'}$, ..., $\frac{q'}{q'}$ en posant q' = $\frac{q}{d}$.

devient $\Theta(4) = \{\theta_{2\pi.\frac{1}{4}[2\pi]}, \theta_{2\pi.\frac{2}{4}[2\pi]}, \theta_{2\pi.\frac{3}{4}[2\pi]}, \theta_{2\pi.\frac{4}{4}[2\pi]}\}$. $\theta_{0[\pi]}$ correspond à la partie réelle du nombre complexe. $\theta_{\frac{\pi}{2}[\pi]}$ à la partie imaginaire du nombre complexe. Posons $\theta_{\mathbb{R}} = \theta_{0[\pi]}$ et $\theta_{\mathbb{I}} = \theta_{\frac{\pi}{2}[\pi]}$

Décomposition d'un nombre complexe en partie réelle et imaginaire Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$z = (e_z, \theta_z, +_{\mathbb{C}}) = (e_{\mathbb{R}}(z), \theta_{\mathbb{R}}, \sigma_{\mathbb{R}}) \bigoplus_{\mathbb{C}} (e_{\mathbb{I}}(z), \theta_{\mathbb{I}}, \sigma_{\mathbb{I}}) = (e_{\mathbb{R}}(z), \theta_{\mathbb{R}}, \sigma_{\mathbb{R}}) \bigoplus_{\mathbb{C}} [(1, \theta_{\mathbb{I}}, +) \bigotimes_{\mathbb{C}} (e_{\mathbb{I}}(z), \theta_{\mathbb{R}}, \sigma_{\mathbb{R}})]$$

$$= x \bigoplus_{\mathbb{C}} i\, y$$

où :
Re $z = e_{\mathbb{R}}(z) = e_z \times \cos(\theta_z) = x$ (partie réelle) et Im $z = e_{\mathbb{I}}(z) = e_z \times \sin(\theta_z) = y$ (partie imaginaire).
$\cos(\theta z)$= projection sur $\theta_{\mathbb{R}}$ du point situé sur le cercle unité à l'extrémité de l'arc de longueur z.
$\sin(\theta z)$= projection sur $\theta_{\mathbb{I}}$ du point situé sur le cercle unité à l'extrémité de l'arc de longueur z.
(e, $\theta_{d[\pi]}$,+) signifie le nombre d'extension e sur la direction positive de la droite de direction $\theta_{d[\pi]}$
$i = (1, \theta_{\mathbb{I}}, +)$; $e_z = \sqrt{e_{\mathbb{R}}(z)^2 + e_{\mathbb{I}}(z)^2}$ (théorème de Pythagore)
On a une distance $d(z_1, z_2) = extension(p(z_1)(z_2))$ = extension $(z_2 \ominus z_1)$ tout comme avec les nombres réels.

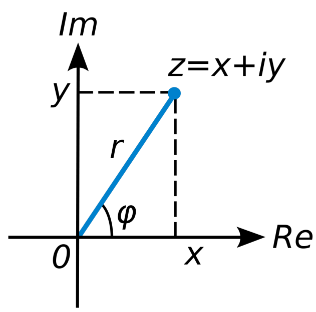

Figure 10 – Représentation cartésienne et polaire d'un nombre complexe. Ici, (e_z, θ) est noté (r, φ).

Conclusion Dans ce document, j'ai cherché à définir les nombres complexes en ajoutant le concept de rotation à la droite des nombres réels. Plusieurs raisons justifient une telle perspective. D'abord, parce que je définis les nombres réels avec une direction constante, libérer la direction forme une généralisation naturelle. De plus, à part le changement d'interprétation du signe des nombres réels (qui devient simulé par les directions), le modèle de la droite des nombres réels s'intègre naturellement dans le plan complexe. En effet, les nombres complexes sont définis additivement sur chaque direction avec la simple addition de la droite des nombres réels. Multiplicativement, la direction se définit comme un rapport entre directions (ou rotation) de manière analogue aux extensions et aux signes des nombres réels (qui correspondent à des rapports entre extensions (ou homothétie) et rapport à l'origine respectivement). Le rapport du nombre réel à la droite se retrouve dans celui du rapport du nombre complexe au plan. Chaque couplage point-unité contient descriptivement le nombre général (la droite), tout comme chaque couplage point-unité-direction contient descriptivement le nombre général (le plan). Réciproquement, la droite et le plan contiennent topologiquement les nombres réels et complexes particuliers. Malgré les arguments en faveur de la construction spatiale des nombres complexes, on note que le bagage nécessaire pour revenir à leur forme algébrique est relativement indépendant et s'appuie sur la conception du plan comme espace vectoriel euclidien à deux dimensions (en plus de la trigonométrie). Puisque la forme algébrique usuelle (x + iy) s'appuie essentiellement sur la notion d'espace vectoriel à deux dimensions - muni de la multiplication particulière du nombre i, son introduction préliminaire paraît plus légère et naturelle. La construction spatiale des nombres complexes s'interprète finalement comme : - un complément fortifiant l'interprétation circulaire et rotative des nombres complexes ; - un concept élargissant la généralisation des nombres réels. [5]

5. En ce qui concerne l'extension des interprétations théologiques, j'ai partagé ce qui m'a paru le plus naturel, c'est-à-dire la distribution du Bien (+) dans le demi-plan supérieur et Mal (-) dans le demi-plan inférieur. La perfection et l'éternité du mouvement circulaire pour Aristote m'influence dans mon association de ces demi-plans au Paradis et à l'Enfer, mais le fait constructivement. Quoi qu'il en soit, une interprétation cosmologique ou théologique me paraît désirable. Par exemple, si l'absence de double tour des nombres complexes se trouvait justifiée par le modèle empirique qu'un solide retrouve sa place après un tour, le hasard de la raison serait étrange. "L'énergie" d'un tour et d'un double tour diffère, pourquoi ignorer la dynamique ? A minima, le + et - devraient être interprétés comme des conditions de création ex-nihilo. Pour les interprétations théologiques développées, là où la droite est l'image du Bien et du Mal, le plan est l'image du Paradis et de l'Enfer. Sous certaines interprétations, si Dieu s'identifie rétroactivement à l'existence du Bien, alors une telle restriction de la liberté humaine est possible.

Sources

- Des fondements de la géométrie, *Henri Poincaré* (1898)
- A History of Western Civilization, *Bertrand Russell* (1945)
- The Cognitive-Theoretic Model of the Universe : A New Kind of Reality Theory, *Christopher Michael Langan* (2002)
- Spatialiser l'analyse réelle, *Adrien Rousseau (www.spatialiserlesmaths.org)* (2020)