Spatialiser l'analyse réelle.

www.spatialiserlesmaths.org

Adrien Jean-Louis Rousseau

13 septembre 2020

Table des matières

Les mathématiques modernes présentent les nombres sous un langage formel (exemple : $x + y = 2$) et fournissent des représentations spatiales à l'aide de coordonnées (sous le concept d'espace vectoriel ou de droite munie d'un repère (origine, unité)). Introduites en 1637 par Descartes dans La Géométrie, les coordonnées ont été rénovées :

- *en 1781 par la Critique de la Raison Pure d'Emmanuel Kant (qui a décrit leur demeure)*
- *en 1898 par Des fondements de la géométrie d'Henri Poincaré (qui a proposé une interprétation dynamique et algébrique de la spatialité des nombres)*
- *en 2002 par le Cognitive-Theoretic Model of the Universe de Christopher Langan (dont le concept d'inclusion descriptive symétrise la relation entre la coordonnée et la droite)*

Aucune de ces innovations ne sont intégrées dans les cursus mathématiques usuels. En d'autres termes, la spatialisation des mathématiques modernes a un retard de ***3 siècles !*** *Ce document rattrape le faux pas pour les nombres réels et fonctions réelles.*

Partie 1

Nombres réels

Que doit vérifier un objet pour : - satisfaire la logique des nombres réels $\mathbb{R}$; - être représentable sur la droite des nombres réels $\mathbb{D}$? À travers une critique des axiomes des nombres réels et un essai sur la correspondance entre nombres réels et droite, nous mettrons en évidence l'échec des systèmes usuels de définition des nombres pour déterminer un nombre-objet général. En identifiant les conditions que doit vérifier x pour : - appartenir avec droit à $\mathbb{R}$; - être représentable avec droit sur $\mathbb{D}$, nous développerons un concept de nombre-objet satisfaisant les deux objectifs. Partant d'un objet défini dans l'Espace correspondant ontologiquement aux nombres réels, nous évoluerons jusqu'à un objet défini dans l'Espace, le Temps et la Théologie satisfaisant les axiomes des nombres réels. Les concepts moteurs de la résolution sont : - la dé-dualisation du couple (état/transition) induit par loi de composition interne ; - la décomposition des nombres en composantes (extension, direction, signe)s ; - la rehiérarchisation de la multiplication par rapport à l'addition dans la définition d'un nombre. La définition des nombres réels résultante est : - hautement hiérarchisée (à l'inverse d'applatie) ; - factorisée logiquement par les composantes ; - explicitement couplée avec une représentation spatiale.

MOTS CLES Axiomes des nombres réels ; Pyramide de dé-dualisation ; Co-addition ; Représentation des nombres réels comme Espace-Temps et Théologie

1.1 Diagnostique sur les nombres réels

1.1.1 Définition axiomatique des nombres réels

Un nombre réel est défini comme un élément d'un corps archimédien totalement ordonné et complet ($\mathbb{R}$) (à la variation d'axiomes près). Autrement dit, $\mathbb{R}$ est un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ (l'addition), $\times$ (la multiplication), d'une relation $\leq$ (la comparaison ou relation d'ordre) - et $\mathbb{R}$ satisfait les axiomes suivant :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x + (y + z) = (x + y) + z \text{ (+ associative)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x \text{ (+ commutative)}$$
$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x \text{ (existence d'un élément neutre 0)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' = x' + x = 0 \text{ (existence d'un opposé pour tout élément)}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y \text{ (} \leq \text{ antisymétrique)}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z \text{ (} \leq \text{ transitive)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \leq y) \text{ ou } (y \leq x) \text{ (} \leq \text{ totale)}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z) \text{ (} \leq \text{ compatible avec +)}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x \times (y \times z) = (x \times y) \times z \text{ (} \times \text{ associative)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \times y = y \times x \text{ (} \times \text{ commutative)}$$
$$\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = 1 \times x = x \text{ (existence d'un élément neutre 1 différent de 0)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \exists x' \in \mathbb{R}, x \times x' = x' \times x = 1 \text{ (existence d'un inverse pour tout élément non nul)}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x \times (y + z) = x \times y + x \times z \text{ (distributivité de } \times \text{ par rapport à +)}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (0 \leq x) \text{ et } (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \times y) \text{ (} \leq \text{ compatible avec } \times \text{)}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (0 < x, 0 \leq y) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{N}, y \leq x \times b) \text{ (} \mathbb{R} \text{ est archimedien)}$$

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, |x_n - x_{n+p}| \leq \epsilon)$$
$$\Rightarrow$$
$$(\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, |l - x_n| \leq \epsilon)$$
$$\text{(} \mathbb{R} \text{ est complet)}$$

Les axiomes définissent les phrases vraies des nombres réels au sein d'un langage formel. Le langage est formel car les phrases : - ont une forme bien spécifique (la syntaxe d'une proposition mathématique) ; - ont une interprétation bien spécifique (la sémantique des propositions mathématiques) [1] ; - peuvent être manipulées d'une façon systématique (la grammaire de la déduction et substitution mathématique). À incomplétude près, toute question sur les nombres réels reçoit une réponse d'après les axiomes des nombres réels ou d'après une proposition dérivée des axiomes. Puisque les propriétés des nombres réels découlent des axiomes, les axiomes constituent une sorte de graine logique plantée pour faire pousser le système des nombres réels : - le soleil de la déduction mathématique transforme la graîne en arbre feuillu (création de théorèmes, corollaires ou propriétés dérivées) ; - le bon choix d'axiomes rend l'arbre fruitier (utile) et harmonieux (cohérent) ; - se passer d'un axiome changerait l'arbre résultant ou l'empêcherait de pousser. *La définition axiomatique pose un système de déduction et de certification des nombres réels.*

Quelles difficultés rencontrent la définition axiomatique ? Censés être le point de départ de la connaissance d'un nombre réel, les axiomes sont à peine connus. Répétant des choses évidentes ou superflues, apparaissant comme une liste théorique voire arbitraire, les axiomes sont en général à la périphérie de l'activité du mathématicien. Comment expliquer que les axiomes ne soient pas aussi fondamentaux pour le mathématicien que pour le langage formel ? Toute connaissance part d'une épistémologie (manière de connaître) fermée qui identifie quelque chose de connu. De multiples autres représentations jouent le rôle d'épistémologies libres qui précisent, orientent ou révèlent l'objet de connaissance. Du point de vue du langage formel, l'épistémologie fermée des nombres réels est les axiomes des nombres réels. Les propositions mathématiques dérivées forment l'épistémologie libre. Du point de vue du mathématicien, de multiples choses connues (les représentations des nombres réels) forment le concept décentralisé de nombre. L'épistémologie fermée des représentations vient de l'impératif catégorique que toute chose connue doit produire des expressions vraies dans le langage formel régulé par les axiomes. Autrement dit, le mathématicien connaît le langage qui connaît les nombres (le langage formel), et pas forcément son champ restreint des propositions axiomatiques. Connaît-il les nombres ? D'abord, en général, le mathématicien ne connaît pas les axiomes en tant qu'axiomes, donc il ne simule pas la connaissance qu'à le langage formel du nombre. Le mathématicien développe-t-il une connaissance plus générale que les axiomes ?

Donnons nous trois nombres *x, y, z* appartenant à l'ensemble des nombres réels, plaçons-les à l'intérieur des axiomes. Demandons-nous si les axiomes racontent des propriétés conformes à celle des objets *x, y, z* que nous connaissons. Est-il vrai que $x+y$ est un nombre ? Si la réponse est que par définition $x+y$ est un nombre, l'affaire est suspecte car il se pourrait que le langage formel soit utilisé pour se légitimer lui même. Regardons une liste choisie de propriétés intégrées dans x d'après les axiomes. L'addition $+$ indique que le nombre est (additionné/additionneur) ; la multiplication $\times$ indique que le nombre est (multiplié/multiplieur). Double peine ! D'abord, pour chaque loi de composition interne, les nombres prennent deux aspects : objet consolidé en état (e.g. additionné) et objet transitionnel (e.g. additionneur). *Une loi de composition interne induit la création d'un couple (état/transition) qui dualise l'objet étudié.* Ensuite, parce qu'à la fois $+$ et à la fois $\times$ jouent le rôle de loi de composition interne, deux couples (état/transition)s distincts participent à la définition des nombres. En quelques lignes, on voit non pas en double, mais en quadruple. Le fait que la composition de deux nombres soit égale à un tierce nombre (e.g. $x + y = z$) ajoute une difficulté de "récursivité interne" dans la conception d'un nombre. x fait la synthèse de multiples contraintes qui paraissent au premier abord incompatibles avec une représentation unifiée des nombres. Par définition, le langage formel permet à tous les

1. À ce sujet, $\forall$ signifie "pour tout" ; $\exists$: "il existe" ; $\mathbb{N}$ "entiers naturels" ; $\mathbb{R}^+$ "nombres réels positifs" ; $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ "nombres réels privés de 0" ; $\mathbb{R}^2$ "paires de nombres réels" ; $\mathbb{R}^3$ "triplets de nombres réels" ; $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ "suites de nombres réels" (avec x_n le n-ième terme) ; $\Rightarrow$ "implique" ; | x | "valeur absolue de x"

nombres réels de se mettre dans les curieuses situations, mais le mathématicien, en général, ne se représente pas ce qui a été permis. Le mathématicien connaît le langage qui connaît les nombres sans connaître le nombre.

Connaître le langage qui connaît les nombres permet indirectement de connaître les nombres, mais connaître les nombres reste toujours appréciable. Notre critique se pose ainsi : x est dualisé (il est à la fois transformation et résultat de transformation), dispersé (transformation additive et multiplicative), "récursif" (incluant des multiples instances de lui mêmes "en lui" lorsqu'il résulte d'une composition). Plus généralement, x satisfait l'ensemble des axiomes des nombres réels. Est-il possible malgré toutes ces contraintes d'unifier le nombre pour y penser comme à un objet ?

1.1.2 Représentation spatiale des nombres réels

À la recherche d'un nombre, difficile de se perdre. Le quotidien fournit de multiples occasions d'attribuer une information numérique à un objet d'intérêt. Dénombrement d'objets similaires dans une configuration spatiale, mesure chronométrée d'une course ou encore prédiction d'une distance à parcourir, diverses opération cognitives numérisent des attributs d'objets car ils vérifient (par eux-mêmes ou en relation avec d'autres instances possibles d'eux-mêmes) la syntaxe ou sémantique des nombres. L'opération est analogue à une attribution d'une valeur ou d'un prédicat numérique plus général exprimable dans le langage formel. L'expression du langage formel est représentée à travers l'objet (par lui-même ou en relation avec d'autres instances possibles), mais seule l'information particulière de l'attribution est reflétée dans le langage particulier de l'objet. Un nombre-objet qui correspondrait généralement à un nombre réel doit être stable pour tous les prédicats possibles des nombres, mais également pour toutes les situations génératives des nombres (lorsqu'il est un multiplieur ou un additionneur par exemple). Le parfait couplage d'un objet avec son ensemble correspond à une dualité entre *inclusion topologique* et *inclusion descriptive* (Langan, 2002). Appliqué à notre cas, tout comme le nombre général x est inclu topologiquement dans un ensemble, x doit contenir la syntaxe, sémantique et les processus générant descriptivement l'ensemble (les axiomes des nombres réels). Les nombre-objets mentionnés jusqu'ici sont inclus topologiquement dans l'ensemble des nombres réels, mais ne le contiennent pas descriptivement (ils contiennent au mieux quelques prédicats). Parmi tous les objets regardés comme des nombres réels, un grand gagnant paraît cependant mériter notre attention. Le point de la droite des nombres réels se distingue. Pour cause, le point couvre (ontologiquement) l'ensemble des nombres réels sur la droite infinie de l'espace euclidien. Autrement dit, tous les prédicats d'attribution de valeur peuvent être inclus dans la droite (exemple : x = 2). La droite définit les mêmes existants que les nombres réels. Un bon début mais l'ontologie est le semi-modèle vide couplé à l'épistémologie associée (qui déterminera les prédicats représentables). Qu'est-ce que le point de la droite des nombres réels a dans le ventre ? n'a-t-il de "nombres réels" que le nom ?

Droite des nombres réels usuelle

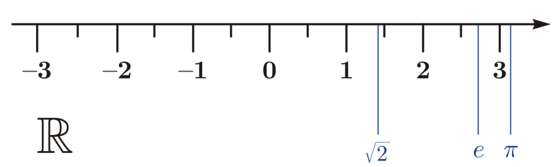

FIGURE 1.1 – Nombres représentés dans l'espace sur la droite des nombres réels usuelle.

D'où vient la correspondance entre la droite et les nombres ?

Le langage de la navigation dans l'espace crée une dualité (lieu/déplacement) dont les deux termes peuvent être associés à des nombres lorsque l'un (déplacement = translation) agit comme transformant de l'autre (lieu = point). *(lieu/déplacement) correspond au couple (additionné/additionneur) des nombres.* L'additionné dans l'espace est le point. L'additionneur est une translation portant trois composantes : extension (ou longueur), direction et signe (ou sens). La translation transfert un point de départ vers un point d'arrivée - en distribuant son (extension, direction,signe) entre les deux points. Par exemple, l'origine O peut être additionnée à $\vec{1}$ (la translation unité). L'origine O est alors transférée vers le point 1. En continuant d'additionner $\vec{1}$ au point obtenu, le point 2 puis 3 puis ... tous les entiers se succèdent sur la droite. En divisant plutôt l'unité en deux parties égales, un point $\frac{1}{2}$ est identifié au niveau de la séparation.

Qu'est-ce qu'un point ? Ce qu'on compare les uns aux autres. *Un point est l'objet consolidé en état (=objet-état) représentant les nombres.* Où se trouve un point ? Sur la droite. Où se trouve la droite ? Là où il y a le point. *La droite est un assemblage cognitif qui n'admet que des références internes.* Et un point d'un nombre particulier, où se trouve-t-il ? Là où se trouve le point du fait de l'origine et de la longueur unité. L'origine, où qu'elle se trouve ? À l'origine. *L'origine est trivialement l'origine et les nombres se définissent par rapport à l'unité.* Et la longueur unité, elle est longue comment ? Il nous faudrait une droite pour la mesurer. Copions $\mathbb{D}$ en attachant la copie $\mathbb{D}'$ à $\mathbb{D}$ au niveau de l'origine O. Changeons maintenant l'unité de $\mathbb{D}$ en utilisant $\mathbb{D}'$ pour la mesurer. En contractant ou dilatant l'unité de $\mathbb{D}$, son point 1 parcours l'infinité de la droite $\mathbb{D}'$. *La longueur unité est aussi longue qu'on veut !* Et pourtant, quel que soit le choix de l'extension unité, $\mathbb{D}$ et ses points restent fidèles à eux-mêmes et inchangés. Comment e, π et $\sqrt{2}$ (pour ne citer que des nombres réels parmi les plus connus), comment font-ils pour s'y repérer ? *Quoi que soit ce qu'on regardait comme un point de $\mathbb{D}$, l'information qu'il porte est fonction linéaire de son unité 1 ...* (c'est-à-dire que lorsque l'unité change, le point change de la même façon. Parce que le point représente un nombre, l'interprétation est que le point multiplie l'unité.).

Un point est toujours multiplicatif de son unité, mais pour multiplier deux points entre eux, deux droites paraissent nécessaires. Dans le cas de droites duplicables $\mathbb{D}s$ attachées à l'origine et superposées, il suffit d'utiliser l'opération de contraction ou dilatation de l'unité qu'on vient juste d'explorer. Pour tout point P de $\mathbb{D}'$, y tirer le point 1 de $\mathbb{D}$ multiplie la droite $\mathbb{D}$ par P (selon $\mathbb{D}'$). Réciproquement, $\mathbb{D}'$ est maintenant divisée par P (selon $\mathbb{D}$) . Un point P est un multiplieur/diviseur. Dans le cas de droites duplicables $\mathbb{D}s$, *(lieu'/lieu) correspond au couple (multiplié/multiplieur) des nombres.* En utilisant le théorème de Thalès, on peut construire la même transformation à partir de deux droites non superposées :

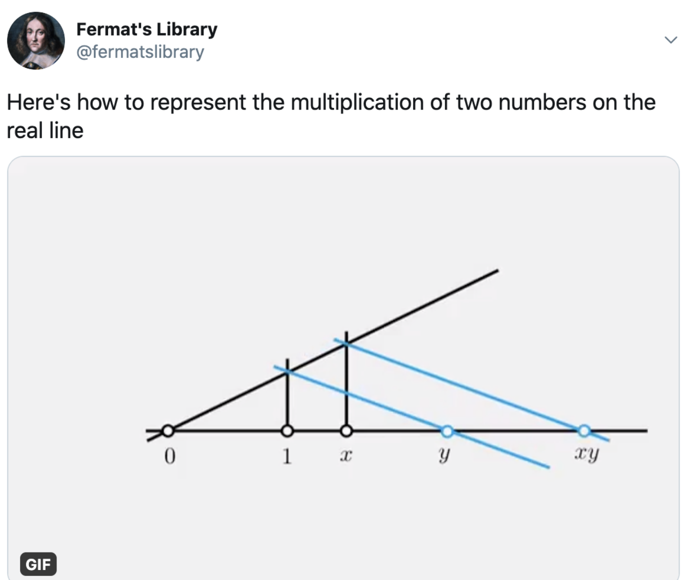

Figure 1.2 – Multiplication de deux nombres sur la droite des nombres réels.

Dans ce cas, la multiplication de y par x est obtenue grâce à une droite $\mathbb{D}'$ non-horizontale passant par l'origine O. Le rapport multiplicatif entre 1 et x est conservé, par un jeu de droites parallèles, entre deux points sur $\mathbb{D}'$ - puis entre y et un tierce point (x × y).

Dans les cas de droites duplicables $\mathbb{D}s$, on retrouve le couple (multiplié/multiplieur) des nombres réels, mais la représentation la plus répandue reste bien $\mathbb{D}$! Revenons à nos moutons !

Description formelle de la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$

D'abord, la droite des nombres réels usuelle fait coexister les nombres dans un objet qui de façon idéalisé se prolonge à l'infini et les contient tous. Un point est (topologiquement) contenu dans la droite qui est l'objet auquel les points appartiennent. Le rapport du point à la droite traduit une relation d'appartenance (topologique) (c'est-à-dire une relation de multiplicité sous un contenant)

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

(Pour tout x un élément appartenant à l'ensemble des nombres réels, x appartient à l'ensemble des nombres réels)

Ensuite, la droite représente naturellement les distances (respectivement, les relations d'ordre). En effet, les translations distribuent entre les points des extensions et des signes qui correspondent respectivement à des distances et à des relations d'ordre [2].

Enfin, les (points/translations) déploient sur la droite une grille de valeurs possibles. La grille de valeurs possibles pourrait se décrire par l'expression mathématique avancée suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists s \in \{0,1\}, \exists a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}^*},$$
$$x = (-1)^s(a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

Pour tout élément x dans l'ensemble des nombres réels, il existe un signe s, il existe un entier naturel a_0, il existe un entier naturel b supérieur à 1, il existe une suite infinie d'entiers a_1,.., a_i , a_{i+1}, ..., - tous compris entre 0 et b-1 - tels que x soit égal au signe multiplié par la somme des quotients a_i divisé par b-à-la-puissance-i lorsque i parcourt les entiers naturels

Le nombre réel x est décrit comme une "partie entière" a_0 [3] et un développement dans une certaine base b. Par exemple si b = 10, alors " $a_1a_2...a_ia_{i+1}...$ " correspond à l'écriture décimale après la virgule de x. a_0 correspond à la grille d'entiers qui recouvre usuellement la droite des nombres réels. L'unité peut être divisée en b parties égales [4] et ce principe permet récursivement d'obtenir un développement dans une certaine base n'importe où ($\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$). Le signe ($(-1)^s$) indique le côté du nombre sur la droite ("à droite", "au milieu" ou "à gauche" de l'origine). Des versions plus faibles de cette grille sont obtenues en limitant le développement du nombre et en utilisant des approximations ($\simeq$). Par exemple, décrivons la grille de valeurs possibles d'un double décimètre millimétré

$$\forall x \in \mathbb{R} \cap [0,20], \exists a_0 \in \{0,1,2,...,19\}, \exists a_1 \in \{0,1,...,9\},$$
$$x \simeq a_0 + \frac{a_1}{10}$$

Pour tout élément x dans l'ensemble des nombres réels restreint aux nombres compris entre 0 et 20 (soit la longueur x de l'objet mesuré dans le contexte d'un double décimètre millimétré), il existe un entier a_0 compris dans 0,1, ..., 19 (correspondant au centimètre a_0), il existe un entier naturel a_1 compris entre 0 et 9 (le millimètre a_1) tels que x est approximativement égal à a_0 ajouté à a_1-divisé-par-b=10 ($a_0 + \frac{a_1}{10}$ centimètres)

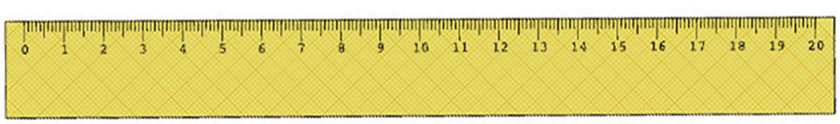

Figure 1.3 – Grille de valeur simplifiée sur un double-décimètre millimétré.

2. le fait d'être plus grand ou plus petit
3. si x est négatif, a_0 est la partie entière de x plus 1
4. (l'extrémité de la a_1-ième partie correspond à $\frac{a_1}{b}$)

Il paraît raisonnable de considérer que toute droite des nombres réels contient une version plus forte de cette grille naïve - s'identifiant idéalement au développement dans une base quelconque décrit dans le paragraphe précédent.

Enfin, les familles de propriétés coexistent dans le langage de la navigation spatiale.

Résumé sur la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$ La droite des nombres réels usuelle correspond à un objet $\mathbb{D}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{D}, x \in \mathbb{D}$$

($\mathbb{D}$ est un ensemble)

$$\textit{Les points de } \mathbb{D} \textit{ sont séparés par des longueurs.}$$

($\mathbb{D}$ admet "une distance")

$$Les\ points\ de\ \mathbb{D}\ se\ comparent\ (l'un\ est\ plus\ \text{à}\ droite\ que\ l'autre)$$

($\mathbb{D}$ est "ordonné")

$$\textit{Les points de } \mathbb{D} \textit{ sont sur une certaine grille de valeurs.}$$

$$\forall x \in \mathbb{D}, \exists s \in \{0,1\}, \exists a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}},$$

$$x = (-1)^s(a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

(Les éléments de $\mathbb{D}$ admettent des développements dans certaines bases)

les propriétés sont en outre rassemblées dans un même médium linguistique fondé sur la navigation dans l'espace.

Note : Le langage de la navigation spatiale apporte d'ailleurs une invariance par changement d'origine. La grille de valeurs, décrite jusqu'ici centrée autour de O, peut être plus généralement re-symétrisée autour de tout point.

Structure du nombre réel dans $\mathbb{D}$

Le nombre est dualisé en (point/translation) dans $\mathbb{D}$ en tant qu'(additionné/additionneur) :

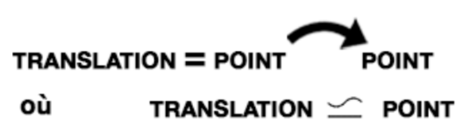

FIGURE 1.4 – (point/translation) correspond au couple (additionné/additionneur) des nombres réels. Une translation transporte un point vers un autre. Point comme translation sont jugés équivalents à un nombre et entre-eux.

De plus, et c'est sans doute une perspective inédite du présent document, un point est une fonction linéaire du point 1 (comme constaté en changeant l'unité de $\mathbb{D}$ ou lorsque $\mathbb{D}$ est intégrée dans $\mathbb{D}$s)

FIGURE 1.5 – (point 1/point) correspond à un couple (multiplié/multiplieur) des nombres réels. Un point transforme le point 1 en point linéairement.

Conclusion sur la droite des nombres réels

Ce n'est pas *par convention* que la droite correspond aux nombres réels. Poincaré, à propos de la géométrie appliquée à l'espace, utilise les mots suivants : "*En résumé, les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable.*" (Poincaré, 1898). De même que le rapport de la géométrie à la nature, le rapport de la droite des nombres réels aux nombres réels est de l'ordre d'une sélection naturelle d'un modèle. On note par exemple que tout n'est pas permis ou bienvenu sur la droite (dont la multiplication qui est plus difficile que l'addition). La droite est contrainte par un potentiel propre à son langage d'expression. Une fois dotée de la grille de valeur idéale, la droite couvre (ontologiquement) l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. En effet, tout nombre réel peut être identifié à un point d'après son développement dans une certaine base et tout point peut réciproquement être attribué à une valeur réelle. La droite détermine alors exactement les mêmes existants que l'ensemble des nombres réels. Épistémologiquement, la droite reste limitée à des points ordonnés, munis d'une certaine distance entre eux et munis de développements dans certaines bases. Le couplage épistémologique requis par les axiomes étant manqué (par exemple, possibilité générale de multiplication), les points de la droite représentent partiellement les nombres réels.

La droite $\mathbb{D}$ n'est pas le support du nombre-objet général que nous cherchions, mais son langage nous a emmené plus loins qu'on pouvait l'espérer à partir de quelques principes et analogies. La syntaxe humaine de la représentation spatiale est régulièrement hypostasiée en philosophie. *L'étendue est un attribut de Dieu, autrement dit Dieu est chose étendue* chez Spinoza [5]. Chez Kant, l'espace est une des deux formes a priori de l'intuition humaine. Accompagné de l'autre forme a priori du temps, l'espace est conçu comme le pont garantissant l'application des catégories logiques de la pensée humaine à la réalité empirique. Le potentiel d'hypostase de l'espace en fait un medium distingué d'expression de structures linguistiques et témoigne d'une exception cognitive qu'il est sage sans doute de reconnaître.

Pour ce qui nous concerne, l'espace échappe à la pure réduction formelle et son esthétique produit un modèle avancé des nombres sous la forme de droite. La droite des nombres réels n'est pas l'objet qu'on cherchait, mais l'objet qu'on cherche ne saurait se priver de la droite des nombres réels.

1.1.3 Diagnostique général

Le langage formel est l'ami savant du mathématicien. Connaissant le nombre sur le bout des doigts, il est capable à propos des nombres d'énoncer leurs vérités et de les démontrer à partir d'axiomes. Le mathématicien apprend à parler des nombres comme le fait son ami génial ; il vérifie toujours auprès de lui que ce qu'il raconte fait sens. Faisant intervenir des syntaxes déterminées, du langage écrit abstrait, des procédures séquentielles, ... le langage formel serait le terrain de jeu privilégié de l'hémisphère gauche du cerveau. La droite des nombres réels est une saveur particulière des nombres. Unifiant le concept de nombres au sein du terrain particulier de l'imagination spatiale, la droite dévoile plusieurs manières d'aborder différentes instances de nombres. Holistique et unitaire plutôt qu'analytique et fragmentaire, la droite sculte les nombres dans un milieu qui injecte chaque nouvelle trouvaille dans une définition centralisée. Lieu des motifs, relations et transformations spatiales, la droite serait le terrain privilégié de l'hémisphère droit du cerveau. [6]

Le mathématicien cherche usuellement à modéliser et internaliser correctement le langage formel. Pour ça, il emploie de multiples outils et stratégies dont la droite des nombres réels est un cas distingué parmi d'autres. Les axiomes en particuliers paraissent se résumer à des ingrédients théoriques de "pourquoi le langage formel est un ami génial et objectif" (ce qui n'intéresse pas le mathématicien pour son activité pratique). Cherchant nous à connaître directement le nombre plutôt que le langage qui connaît le nombre, notre situation valorise particulièrement à la fois la droite des nombres réels et les axiomes des nombres réels. Le nombre en tant qu'objet connu est unitaire. La droite des nombres réels est l'image incomplète de l'objet centralisé qu'on cherche à construire. Le nombre en tant qu'objet connu dispose d'une enveloppe syntaxique et grammaticale qui forme sa définition. Les axiomes des nombres réels prévoient ce qu'un nombre doit "pouvoir faire" et quels règles s'appliquent lorsqu'il pratique ces possibilités. Notre objet centralisé doit intégrer directement toutes les possibilités et règles symbolisées dans les axiomes.

5. Voir : L'Ethique, Spinoza, Deuxième partie (DE LA NATURE ET DE L'ORIGINE DE L'ESPRIT), Proposition II
6. See : Right Hemisphere and Left Hemisphere, Chapter 6, The Mathematical Experience, Philip J. Davis and Reuben Hersh

1.2 Définition du langage des nombres réels

Nous cherchons à définir un nombre-objet général capable de correspondre : - au x de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$; - au point de la droite des nombres réels $\mathbb{D}$.

D'abord, x doit satisfaire des contraintes épistémologiques fermantes héritées de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Puisque les règles de déduction logique seraient distribuées universellement dans la réalité [7], les axiomes forment un ingrédient épistémologique suffisant. En effet, imposer à x une contrainte venant d'une proposition non axiomatique dérivée reviendrait à établir un raccourci cognitif. Puisque le sujet des raccourcis est infiniment large, il sort justement du cadre de notre étude. De plus, les axiomes des nombres réels indiquent une épistémologie fermante une fois la déduction logique autorisée. Une autre collection d'axiomes et d'autres propositions mathématiques dérivées pourraient peut être fournir de meilleurs résultats pratiques que l'exacte liste qu'on a choisi, mais on peut espérer que de "bons axiomes" ont déjà été sélectionnés par la communauté mathématique. Autre simplification du problème, on considérera que certaines opérations (égalité, comparaison, sélection d'une collection d'instances) n'ont pas besoin d'être explicitement garanties - puisqu'elles seraient elles-mêmes des opérations logiques élémentaires distribuées universellement. Finalement, il s'agit d'intégrer l'ensemble des ingrédients restants : - possibilité de composition ; - possibilité de composition selon $+$ (l'addition) ; - selon $\times$ (la multiplication) ; - interaction adéquate entre $+$ et $\times$; - fondement de la relation de comparaison $\leq$; - constantes et possibilité d'instanciations relatives à ces constantes ou à d'autre instances du nombre-objet (i.e. reste des axiomes). L'intégration de ce contenu dans un nombre-objet prend la forme d'un parcours exhaustif des axiomes des nombres réels, qui nécessite néanmoins de traiter prioritairement les difficultés liées aux deux lois de compositions : - x est dualisé (il est à la fois transformation de lui même et résultat de transformation) ; - dispersé (transformation additive et multiplicative) ; - "récursif" (incluant des multiples instances de lui même "en lui" lorsqu'il résulte d'une composition).

Ensuite, puisque x doit correspondre au point de la droite $\mathbb{D}$, il s'agit d'assurer que toute nos avancées restent compatibles avec l'expression de x dans $\mathbb{D}$. D'une part, il faut garantir la possibilité de correspondance à l'espace, d'autre part, il faut empêcher qu'une mauvaise pré-conception sur la droite freine l'intelligibilité des résolutions. Afin de nous libérer de fausses pré-conceptions venant du pré-concept (point/translation) de $\mathbb{D}$, nous préciserons préliminairement l'architecture générale de $\mathbb{D}$ et comment (point/translation) s'y intègre. Une fois ça fait, nous résoudrons les problèmes généraux liés aux lois de compositions.

1.2.1 Pré-résolution de la dualité (point/translation)

Le nombre en tant qu'(additionné/additionneur) se scinde dans $\mathbb{D}$ en (point/translation). Tandis que le point est inextensif, la translation emporte de l'(extension,direction,signe).

Puisqu'on souhaite obtenir une définition des nombres particularisable en $\mathbb{D}$, et puisque l'(extension,direction,signe) ne peut apparaître par magie, alors l'(extension,direction,signe) doit être intégrée dans notre définition. Puisque de plus tous les nombres doivent appartenir à un alphabet homogène $\mathbb{R}$ (comme dans les axiomes usuels), alors l'(extension,direction,signe) doit se distribuer sur tous les nombres de notre définition. Pour attribuer un triplet (extension, direction,signe) à un point, on le munit de celui qui le sépare de l'origine O. Ordinairement, une extension ne peut être attribuée qu'à une figure étendue (comme une longueur de segment, un arc de cercle ou - en généralisant un peu - un volume), comment expliquer qu'un point soit muni d'(extension,direction,signe) tout en étant inextensif ? D'abord, nous avons déjà établi qu'un point est multiplieur de l'unité. Parce qu'il transforme une (extension,direction,signe) particulière, un point a plus de rapport direct aux composantes qu'il n'y paraît. La correspondance entre le point et son (extension,direction,signe) se clarifiera dans le langage plus général que nous mettons en place, mais reste exclue de $\mathbb{D}$. Tout comme une photographie garde les couleurs d'un chemin mais perd l'intention des gens qui s'y promènent, $\mathbb{D}$ est une photographie de notre définition des nombres qui a perdu l'(extension,direction,signe) des nombres réels. Puisque (extension,direction,signe) est bien inclus dans les points de $\mathbb{D}$ avant la perte (comme les intentions étaient incluses dans les personnes qui se promenaient sur le chemin), il s'agit d'interpréter les objets spatiaux en injectant (extension,direction, signe) dans les points. Ci-dessous, un schéma résumant les dépendances associées :

7. Les mathématiques sont puissantes parce qu'elles suivent les tautologies logiques du réels, donc ce point semble défendable.

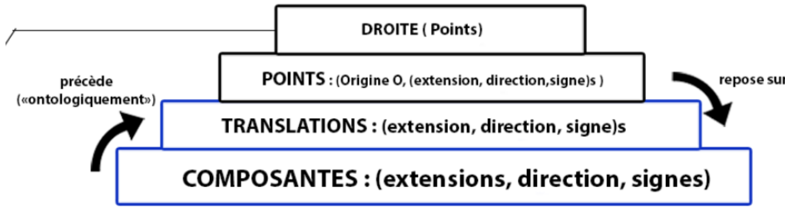

FIGURE 1.6 – La représentation spatiale se structure d'abord par les composantes (hiérarchie montante). Les composantes déterminent des translations, qui déterminent des points (relativement à l'origine O), qui déterminent la droite.

Même si les composantes précèdent les autres objets ontologico-syntaxiquement, l'espace offre une structure circulaire dans laquelle une droite aussi définit des composantes entre ses paires de points.

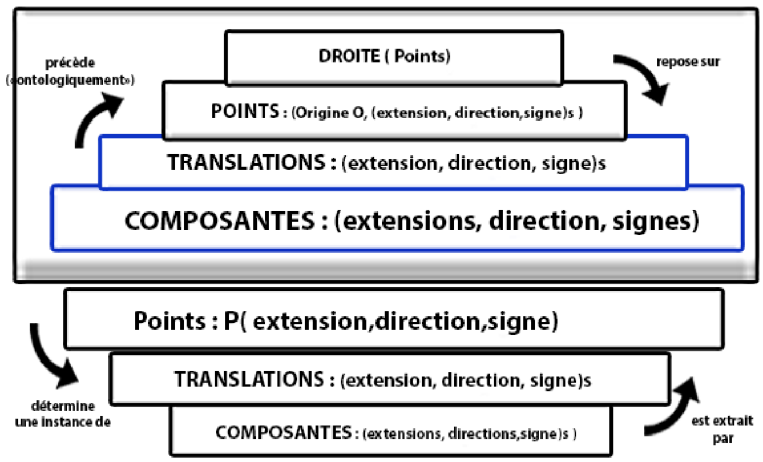

FIGURE 1.7 – Les points distribuent des translations et des composantes entre eux (hiérarchie descendante supposant donnée la hiérarchie montante). La droite détermine des paires de points, qui déterminent des translations, qui déterminent des composantes.

Sommes-nous satisfaits de cette architecture partant des composantes ? Que serait un point sans composantes le séparant (potentiellement) d'autres points ? *Seule une définition holistique qui poserait le point en même temps que les composantes nous ferait présenter le point comme un objet fondateur du langage spatial.* De même pour la translation comprise comme pur déplacement (un déplacement n'est déplacement que s'il a une distance parcourir) [8]. Par contre, est-ce qu'une composante emporte déjà par elle-même "de l'espace" ? Est-il possible de se donner une extension double d'une autre (sans point ni translation) ? Et de telles extensions ne seraient-elles pas déjà "dans de l'espace" ? Plus généralement, ne faut-il pas d'abord obtenir une structure de composantes pour créer des points séparés par ces composantes ? *La génération de l'espace (de représentation des nombres réels) par des composantes est une contrainte qui paraît adhérer à l'architecture du langage spatial.* Une fois la double hiérarchie établie, tout point est associé à un unique (extension,direction,signe) canonique s'identifiant à celui qui le sépare de l'origine O.

Puisque notre définition des nombres réels doit pouvoir se particulariser en droite des nombres réels $\mathbb{D}$, alors l'architecture du langage spatial impacte l'architecture du langage général des nombres réels *Les nombres sont générés par des (extension,direction,signe)s et cela leur permet de se particulariser dans $\mathbb{D}$ à la fois en*

8. Poincaré fonde la géométrie sur les déplacements. Est-ce que notre théorie de la primauté des composantes s'en trouve malmenée ? Poincaré fait appel non seulement à des perceptions externes mais également à une "sensation musculaire interne" pour définir un déplacement. Qu'est-ce qu'une sensation musculaire interne si ce n'est une forme rudimentaire d'extension ? De même, les perceptions externes ne couvaient-elles pas la possibilité d'être séparées par des signes, si des déplacements à la structure de groupe (pouvant s'itérer et s'annuler) les séparent ? Parce que la perception externe conditionne le déplacement, si le déplacement fait le signe, la perception externe co-fait le signe. Le signe se comporte alors comme un potentiel distribué sur l'univers exploré par le déplacement. Tout comme l'extension. Bref, les composantes sont posées en même temps que l'objet élémentaire du déplacement et donc la définition est "holistique". Si les raisonnements de brillants mathématiciens peuvent se concentrer sur les déplacements et leur structure algébrique, la primauté des composantes reste défendable.

point (perte de l'(extension,direction,signe)) et en translation. L'impact des composantes sur l'architecture du langage général, suggéré ici par intuition, est développé plus en détail en partie : 1.2.5, page 17. De même, la relation des composantes aux points et paires de points est développée plus en détail en partie : 1.3.8, page 30.

1.2.2 Résolution de la dualité (état/transition)

Parce qu'ils contiennent des (extension,direction,signe)s, les nombres peuvent désormais se particulariser en (point/translation)s qui correspondront à un (additionné/additionneur)s dans $\mathbb{D}$. Par ailleurs, les nombres sont multiplieurs dans $\mathbb{D}$. Tandis que dans $\mathbb{D}$ tout nombre est multiplieur de 1 et seul 1 est multiplié, dans $\mathbb{D}$s tout nombre est (multiplié/multiplieur). Même si seul 1 est multiplié dans $\mathbb{D}$, tout nombre est potentiellement (multiplié/multiplieur) (à extension de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$s près). Puisque les nombres se particularisent en l'alphabet homogène $\mathbb{R}$ des axiomes usuels, il faut réussir à homogénéiser l'additionné, l'additionneur, le multiplié et le multiplieur. La double dualité des couples (état/transition) doit disparaître. Commençons !

Dualité (état/transition) Dans le formalisme usuel, les deux éléments neutres des lois de composition (à savoir 0 et 1) paraissent intéressants pour aborder le problème de la dualité état/transition. En effet, ils vérifient des propositions qui leur font jouer différents rôles simplement en relation avec eux-mêmes. La possibilité s'offre alors d'isoler les différences numériques et de s'interroger purement sur les différents aspects du nombre. Ainsi, $(0 + 0 = 0)$ indique que l'élément neutre joue le rôle : - d'état (0), - de transition (+ 0), - d'état-transitionné (0 + 0) et de nombre constatant son égalité à l'état-transitionné (= 0). De même pour 1 et la multiplication $\times$, à partir de la proposition $1 \times 1 = 1$. Chaque rôle correspond à un aspect particulier d'un seul et même nombre. En considérant également l'espace, puisque la droite des nombres réels est invariante par changement d'unité, et puisqu'elle a besoin préliminairement d'une unité pour définir différents points, alors notre perspective est que tout nombre multiplie l'unité 1 (i.e. 0 multiplie l'unité 1 en 0). Sous cette perspective, dans $\mathbb{D}$, la dualité (état/transition) de l'élément neutre n'est strictement résolue que pour le cas particulier du nombre 1. La droite admet 1 comme multiplié, multiplieur et multiplié-fois-multiplieur. L'expression "$1 = 1 \times 1$" indique que 1 est à la fois : - lui-même - multiplié, - multiplieur ; - multiplié-fois-multiplieur. Il existe quatre termes qui, liés grâce à une certaine structure multiplicative, sont égaux à 1. Quelle est la relation du nombre à la structure multiplicative ? D'abord, $\times$ (la multiplication) ne peut pas toucher à x (le nombre) si $\times$ est vraiment externe à x. En intégrant $\times$ dans x, la multiplication devient un mode d'action d'un nombre sur un autre - qui détermine le résultat de l'action (une autre instance de nombre). Un nombre est alors dualisé en deux aspects : transition et état - voir trialisé en (état,transition,état-transitionné). Quel est l'opérateur qui applique la transition à l'état ? Lorsqu'on voudra déclarer que la multiplication du nombre-objet x satisfait les axiomes des nombres réels, on voudra vérifier que toute instance de résultat de multiplications réalisées d'après le nombre x est conforme aux axiomes des nombres réels. Rappelons que d'après la dualité entre *inclusion topologique* et *inclusion descriptive*, x n'est pas seulement un élément de l'ensemble, mais doit aussi contenir les règles et processus générant l'ensemble. Donc x doit pouvoir être mis en situation où il multiplie des instances de lui même et en identifie le résultat. Sinon, on ne décrit plus le nombre-objet, mais un simple système d'écriture mathématique externe dans lequel x n'a rien d'un nombre. D'ailleurs, le nombre-objet général est stable pour tous les prédicats numériques et toutes les situations génératives de nombres, donc lorsqu'un nombre multiplie un autre nombre défini, il y a bien un multiplié, multiplieur et résultat de multiplication. Parce que le nombre-objet général est multiplié, multipliant, résultat de multiplication et opérateur liant les trois termes, le nombre-objet général est la structure multiplicative. On obtient : $1 = (1 ;(\times 1) ; 1 \times 1)$

FIGURE 1.8 – Les nombres sont des transformations de nombres.

La structure associée est celle où un [NOMBRE OPERATEUR] est égal à un [NOMBRE MULTIPLIÉ] transformé par un [NOMBRE MULTIPLIEUR] (symbolisé par la flèche) en un [NOMBRE MULTIPLIÉ fois NOMBRE MULTIPLIEUR]. En supposant l'identité de ces nombres, l'équation se résout :

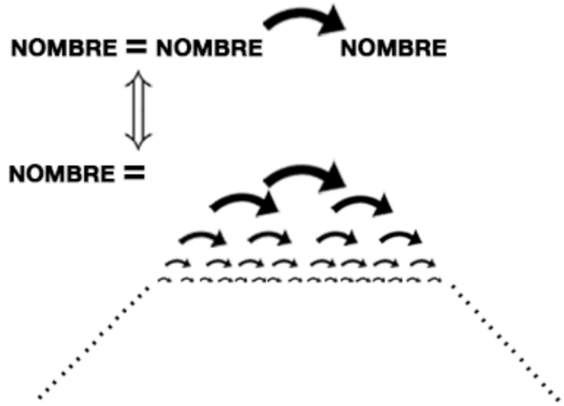

FIGURE 1.9 – Un nombre est une transformation multiplicative de nombres en nombres. Les nombres sont des "pyramides" infinies de transformations multiplicatives. Plus simplement : un nombre est multiplicatif.

Qu'est-ce que 1 ? 1 *(la pyramide totale)*. Qu'est-ce que 1 multiplié ? 1 *(la pyramide de gauche)*. Qu'est-ce que 1 multiplié par 1 ? 1 *(la pyramide de droite)*. Qu'est-ce que 1 multiplieur ? ... une flèche transformante. Parce qu'un nombre transforme pyramide en pyramide, la pyramide est le nombre réel comme objet-état (= nombre consolidé en état). La flèche transformante est quant à elle le nombre comme objet-transition (= nombre transformant). On comprendra plus tard que la pyramide correspond à l'Espace, et que la flèche correspond au Temps. Parce que notre nombre ne peut pas être en même temps l'Espace et le Temps, le but est d'obtenir une forme d'équivalence :

Equation de dé-dualisation (*ou couplage Espace-Temps*)

FIGURE 1.10 – Pour le couple (état/transition) dé-dualisé, la transition devient identique à l'état.

Reprenons. Et qu'est-ce que 1 ? 1 *(la pyramide totale)*. Qu'est-ce que 1 multiplié ? 1 *(la pyramide de gauche)*. Qu'est-ce que 1 multiplié par 1 ? 1 *(la pyramide de droite)*. Qu'est-ce que 1 multiplieur ? ... 1 *(la pyramide par équation de dé-dualisation)*. La boucle est bouclée.

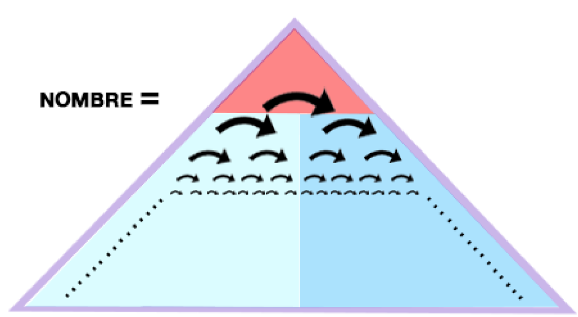

FIGURE 1.11 – 1 *(la pyramide totale en violet)* ; 1 multiplié *(la pyramide gauche en bleu clair)* ; 1-multiplié-fois-1-multiplieur *(la pyramide droite en bleu foncé)* ; 1 multiplieur *(la pyramide en rouge)* ; tous ces nombres sont identiques grâce à l'équation de dé-dualisation.

Pour comprendre comment justifier l'équation de dé-dualisation, utilisons un raisonnement par analyse puis synthèse. Supposons que l'équation est vérifiée et tirons en les conséquences. La dé-dualisation a deux conséquences. Premièrement, l'égalité transition-état (transition → état) indique que toute transition (qui semble en suspend entre un multiplié et un multiplié-fois-multiplieur) peut être regardée indépendamment comme un objet-état (1). Deuxièmement, l'égalité état-transition (état → transition) indique que toute pyramide peut être réduite à une transformation (flèche injectable dans une pyramide). Tout objet-état peut devenir objet-transition (2).

La condition (1) est obtenue en garantissant la correspondance (ontologique) de notre nombre-objet général avec l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{D}$, l'égalité transition-état indique que les instances du nombre-objet général correspondent exactement aux différents points de la droite *(tout Temps correspond à un Espace)*. La condition (2) est obtenue en garantissant que tous les éléments appartenant à l'ensemble des nombres réels sont également des fonctions applicables sur les éléments *(tout Espace correspond à un Temps)*. Dans $\mathbb{D}$, l'égalité état-transition correspond au fait que tout point de $\mathbb{D}$ (quel que soit la manière dont il est obtenu) est une multiplication de 1 (qui préserve de ce fait $\mathbb{D}$ par changement d'unité).

Nous connaissons notre objectif, mais tout est trop identique pour résoudre l'équivalence transition-état et état-transition. Puisque 1 est l'élément neutre de la multiplication, l'identité structurelle établie entre le multiplieur, le multiplié, le multiplié-fois-multiplieur et le nombre opérateur s'accompagne ici de l'identité de ces nombres. À quoi ressemble un nombre dans le cas général ?

Le nombre comme structure multiplicative

Un nombre en général est homogène au nombre 1. Par suite, un nombre est une structure multiplicative autosimilaire. Peut-il être muni d'une équation de dé-dualisation ?

Dans $\mathbb{D}$ Dans $\mathbb{D}$, 1 est le seul point-multiplié. Tout point P correspond à un point-multiplieur. Lorsque P multiplie 1, P-fois-1 est égal au point-produit P. Pour que le point-produit P soit identique au point-multiplieur P, le point P prend la forme suivante :

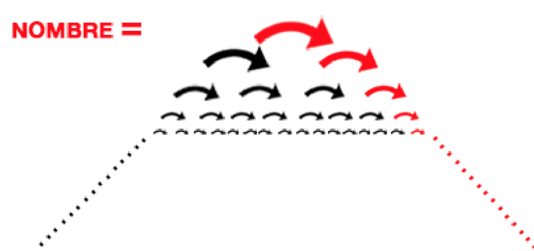

FIGURE 1.12 – Un nombre x (en rouge) est égal à la pyramide multipliant 1 (en noire) vers x (en rouge). Le Temps de x (la flêche rouge) est couplé à l'Espace propre de x (la pyramide). L'Espace de x multipliant l'unité 1 est l'Espace propre de x.

Exemple Si par exemple le nombre x est le nombre 4, x est décrit comme le nombre transformant 1 en 4, 1 étant le nombre transformant 1 en 1, 4 étant le nombre transformant 1 en 4, etc...

En général Puisque tout point P est point-multiplieur, la pyramide de droite correspond naturellement à n'importe quel nombre. Qu'en est-il de la pyramide de gauche ? Parce que tout nombre peut devenir multiplié (cf. $\mathbb{D}$s ou $\mathbb{R}$), alors la pyramide de gauche peut être un nombre arbitraire dans le cas général. Le lien entre la pyramide de gauche et la pyramide de droite est imposé par le nombre multiplieur (en haut de la pyramide). La règle *récursivement* imposée est que la pyramide de gauche fois le nombre multiplieur donne la pyramide de droite.

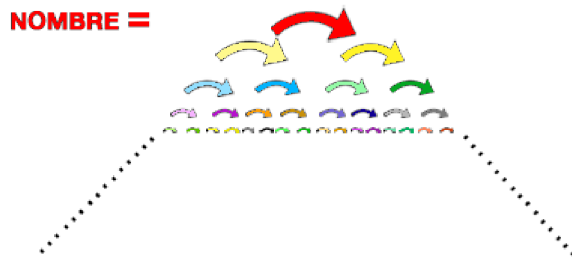

FIGURE 1.13 – Un nombre x (en rouge) est égal à la pyramide de transformations préservant son rapport multiplicatif entre facteur et produit en haut de sa pyramide (et ainsi de suite récursivement). Le Temps propre de x peut être couplé à divers Espaces.

Exemple (bis) 4 est le nombre transformant 2 en 8, 2 étant le nombre transformant 1 en 2, 8 étant le nombre transformant π en 8π, etc ...

La pyramide totale, la pyramide de gauche, la pyramide de droite et la flèche transformante indiquent toujours le même objet. Le principe de récursivité de la détermination du couple (facteur/produit) par le sommet garantit la dé-dualisation. En tant qu'objet-état, le nombre converge d'une façon déterminée par la transition en haut de la pyramide (l'objet-état est donc associable à sa transition). En tant que transition, le nombre applique récursivement une contrainte multiplicative aux nombres de gauche et de droite (faisant converger une pyramide en objet-état associé). L'équation de dé-dualisation est garantie dans le cas général. *Un nombre est une structure multiplicative autosimilaire récursive munie d'une équation de dé-dualisation.*

Pour que le nombre x arrive à s'intégrer dans nos représentations, nous ne pouvons pas le laisser dans sa forme purement générale. Après un couplage initial (sélection de l'Espace associé à l'identité temporelle), tout nombre est associé à un Temps Propre (multiplication générale) et à un Espace Propre (multiplication de l'unité spatio-temporelle). Le lien entre le Temps propre et l'Espace propre est que le Temps propre appliqué à l'Espace unité détermine l'Espace propre. Tout nombre est un couplage Espace-Temps.

1.2.3 La multiplication des nombres réels

Que signifie multiplier deux nombres entre eux ? x, toute structure multiplicative qu'il est, reste x. La pyramide établit le potentiel multiplicatif de x mais ne le compose pas. En particulier, x n'est ni une multiplication explicite de l'unité ($1 \times x$), ni l'ensemble de tous les couples (facteurs, produits) pouvant jouer le rôle de (pyramide de gauche, pyramide de droite) (soit un objet semblable à $\{(y, x \times y), y \in \mathbb{R}\}$), encore moins la spécification de toutes les instances de sous-pyramides rendant sa pyramide valide. Au sein du nombre x, la pyramide de gauche fois le multiplieur est égale à la pyramide de droite (ce qui fait de x un objet multiplicatif). Pour autant, un multiplié-fois-multiplieur, en tant qu'objet, n'est pas un sous-objet du multiplieur mais bel et bien un objet à part entière. Un multiplié-fois-multiplieur n'est pas la "pyramide de droite de" son multiplieur (ou par commutativité, la "pyramide de droite de" son multiplié-devenant-son-multiplieur). Pour obtenir le multiplié-fois-multiplieur comme nombre-objet, il s'agit de réaliser des chaînes de multiplications qui exploitent adéquatement les potentiels multiplicatifs des nombres (comme dans $\mathbb{D}$s). Dans notre cas, la pyramide de droite d'un nombre, résultat d'une première multiplication, doit être récupérée comme une pyramide de gauche d'un autre nombre.

La multiplication de nombres entre eux correspond à la composition de deux nombres :

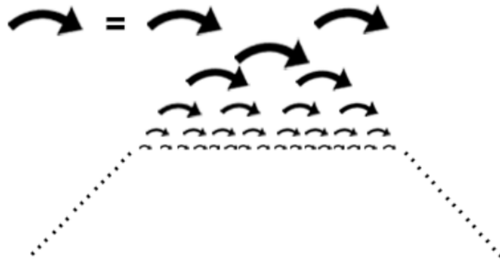

FIGURE 1.14 – Les nombres peuvent se composer en passant par une "unité temporaire". Si le sommet d'une pyramide correspond à une transition composant des nombres, alors la pyramide est dite "de multiplication".

Une transition, placée au sommet d'une pyramide, peut être constituée de deux nombres composés (voir figure 1.14). Les deux nombres sont à la fois objet-transition (les deux flèches transformantes), et à la fois objet-état (deux pyramides dont la pyramide de droite de l'une correspond à la pyramide de gauche de l'autre). Appelons nombre antérieur le premier nombre x et nombre postérieur le deuxième nombre y. La pyramide commune est interprétée : - comme un résultat temporaire (de la perspective du nombre antérieur x) ; - comme une unité temporaire (de la perspective du nombre postérieur y). Les deux nombres sont liés multiplicativement au sein d'une pyramide constituant le nombre-objet ($x \times y$). Si le sommet d'une pyramide compose des nombres conformément à Figure 1.14, alors la pyramide pourra être dite "de multiplication".

Interprétation simplifiée : Le Temps peut être constitué de deux Temps séparés par un Espace commun.

Note : à la différence du langage formel usuel qui compose les nombres x et y avec un système d'écriture mathématique conventionel externe ($x \times y$), la composition multiplicative ($x \times y$) prend ici la forme d'une pyramide combinant adéquatement la pyramide x et la pyramide y. La multiplication est donc réalisée, comme on le souhaite, à l'intérieur du nombre.

1.2.4 L'addition dans les nombres réels

Addition des nombres réels

Nouvelle loi de composition, nouvelle pyramide ? Rhomboïdale peut être ? Ou alors un dôme ? Quelles drôles d'idées ! Parce qu'une addition ajoute toujours deux nombres qui ont la même unité, et parce que l'addition s'adapte aux changements d'unités, alors l'addition est loin d'être indépendante de la multiplication. Parce que les nombres ont toujours la même unité dans une addition, les nombres ne s'additionnent pas les uns après les autres, mais l'un en même temps que l'autre (par rapport à la multiplication).

L'addition s'intègre orthogonalement dans la multiplication.

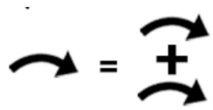

FIGURE 1.15 – Les nombres peuvent se co-additionner orthogonalement à la multiplication.

Les nombres ne sont pas additionnés entre eux mais co-additionnés. Le terme *orthogonal* est choisi par analogie au produit scalaire dans des bases orthogonales. L'orthogonalité traduit ici le fait que deux nombres additionnés ne "bavent (structurellement) pas" les uns sur les autres lorsqu'ils multiplient ensemble le même nombre. Plutôt, ils multiplient chacun de leur côté les nombres et restent séparés et rassemblés par la co-addition quels que soient les nombres multipliés. Quelques propriétés logiques de l'addition sont déjà introduites par le concept de co-addition. Par exemple, il n'y a pas de différence entre un additioné et un additionneur, donc les deux termes sont permutables (propriété appelée commutativité de l'addition). De même, le concept de co-addition intégré dans une structure multiplicative suggère que les nombres co-additionnés "co-existent dans le même espace par rapport à la multiplication". Dans cette analogie, la multiplication peut être identifiée au Temps, l'addition à la partition cumulative ou substractive de l'Espace qui subit le Temps. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition traduit le fait que le temps "coule uniformément" dans tout l'espace qui reste soudé malgré les nouvelles partitions ou renormalisations locales des temps provoquées par la multiplication. Les co-additionnés se composent dans ce cas parfaitement symétriquement à l'intérieur du temps (i.e. de la multiplication) indépendemment d'un temps de refactorisation (propriété appelée associativité de l'addition). L'analogie est justifiée par le fait que $\mathbb{D}$ est identifiée à la transformation grammaticale (au temps t=1) [9] de la multiplication appliquée à l'unité. Autrement dit, tout point P multiplie 1, et donc correspond à sa transformation grammaticale au temps t=1 de l'unité 1. Des multiplications ultérieures consistent à réitérer la même transformation (t=2, t=3, ...) en intercalant des nombres temporaires.

L'apparente dualité (additionné/additionneur) est résolue en co-additionnant les nombres dans une multiplication dé-dualisée. Les nombres ne sont pas (additionnés/additionneurs) mais co-additionnés. Les nombres co-additionnés multiplient ensemble et se distribuent parallèlement les mêmes multiplications (ou Temps). L'absence de dualité (état/transition) additive s'explique par le fait que + est une loi de (co-)composition interne orthogonale à la multiplication et non une loi de composition interne. La possibilité de co-existence à la fois du potentiel additif et du potentiel multiplicatif dans le nombre s'explique par l'orthogonalité des deux processus, l'un analogue à l'accumulation spatiale (l'addition), l'autre analogue à un temps unitaire (la multiplication). Le nombre est multiplicatif parce que tout accumulation spatiale s'instancie dans un temps (par exemple, $\mathbb{D}$ est le nombre au temps t=1).

Note : Dans $\mathbb{D}$, l'ordre observé entre additionné et additionneur est interprété comme un ordre de lecture. En effet, les transferts de points successifs (bien qu'ordonnés du point de vue de la navigation dans l'espace) sont associatifs et commutatifs par ailleurs.

Conclusion sur la structure générale du nombre-objet Devant des incompréhensions prévisibles, je préciserais que le but de la structure identifiée n'est évidemment pas de conditionner l'identification d'un nombre réel à une infinité de "paramètres". Puisque qu'une pyramide entièrement spécifiée serait constituée d'une infinité de "sous-pyramides paramétrisées", il est évident que l'idée même d'une spécification exhaustive est erronée. Le but de la structure identifiée n'est pas non plus d'imposer de regarder un nombre à la fois comme un élément x, une fonction linéaire $\hat{x} : t \mapsto t \times x$; ou encore de regarder toute addition $x + y$ comme une fonction linéaire à deux paramètres : $\widehat{x+y} : (x, y) \mapsto (t \mapsto t \times (x + y))$. Tout nombre x est simplement x mais il est défini avec le potentiel d'être : - un composé, un composeur, un résultat de composition ; - une composition multiplicative ; - une (co-)composition additive (compatible avec la composition multiplicative). Ces potentiels sont évidemment des conditions nécessaires pour se donner un nombre-objet x digne d'un nombre réel. x est multiplicatif auto-similaire récursif muni d'une équation de dé-dualisation et d'une co-addition orthogonale à sa multiplication, mais cela assure seulement son appartenance *définie* à $\mathbb{R}$. Un objet doit pouvoir "pratiquer les axiomes des nombres réels" pour les satisfaire, et nous avons proposé un architecture qui permet à un objet x de correspondre à : - l'objet décrit par les axiomes des nombres réels (1) ; - un point de la droite des nombres réels usuelle (2). Nous avons hâte d'intégrer la logique des axiomes des nombres réels dans l'objet que nous venons d'identifier, mais quelques ajustements doivent être précisés afin d'y parvenir. Jusqu'ici, l'objectif (2) de représentation spatiale a été discuté quant à l'interprétation des objets de $\mathbb{D}$, mais pas quant aux conséquences générales de la décomposition (extension,direction,signe).

9. Parce que le temps de multiplication est unitaire, t=1 signifie "une première application du Temps des nombres", ou chaque nombre est couplé à un Temps propre qui le différencie des autres nombres.

1.2.5 Préparation à la ré-écriture des axiomes

Toute structure des nombres réels doit descendre jusqu'aux composantes pour s'appliquer au nombre-objet spatial. Les composantes sont absentes des axiomes des nombres réels usuels mais peuvent être obtenues à l'aide des fonctions suivantes :

$$extension : x \mapsto extension(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$direction : x \mapsto \{horizontale\} \tag{1.2}$$

$$signe : x \mapsto signe(x) = \begin{cases} + & \text{si} \quad x > 0 \\ - & \text{si} \quad x < 0 \\ +- & \text{sinon} \quad x = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Puisque les composantes sont un ingrédient essentiel de la représentation spatiale, nous avons le choix :

— (1) de se passer des composantes pour la spécification logique des nombres (1.a.), puis de reconstruire $\mathbb{D}$ à partir des composantes à l'aide des fonctions extractrices (1.b). Il s'agirait en particulier pour tout x d'y intégrer sa relation à 0 (d'après 1.3) et sa relation à l'opposé -x (d'après 1.1)

— (2) de reconstruire la logique des axiomes des nombres réels à partir des composantes elles-mêmes.

Quelles sont les difficultés de (1) ? Supposons les nombres construits indépendamment des composantes. Une fois les nombres projetés sur les composantes de $\mathbb{D}$ (1.b), il s'agit de reconstruire le langage spatial à partir des composantes. Les fonctions extractrices transportent ontologiquement les nombres de (1.a) vers les nombres de (1.b), mais n'apportent rien épistémologiquement. Les fonctions extractrices ne sont pas des morphismes qui préservent la structure du nombre tel qu'il est défini en (1.a) dans l'espace, c'est-à-dire que la "dynamique" du nombre dans l'espace reste à construire. Pire, les fonctions extractrices apportent dans l'espace des résidus linguistiques médiocres et inélégants (la relation à 0 et à l'opposé). En d'autres termes, (1) semble un procédé fictif qui ne lie pas élégamment la droite des nombres réels $\mathbb{D}$ et les axiomes des nombres réels. Définir la droite $\mathbb{D}$ avec le processus (1) semble consister à construire deux modèles différents pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{D}$. Les similarités entre $\mathbb{D}$ et le langage formel, ainsi que la correspondance ontologique possible grâce à la grille de valeur idéale, dissimulent la séparation. Pour coupler les axiomes des nombres réels et la droite des nombres réels $\mathbb{D}$, nous partirons directement de (2). Autrement dit, les nombres vont être définis sur les composantes. Une fois les composantes structurées en nombre, leur logique : - se "compresse" en les axiomes des nombres réels ; - décrit intrinsèquement $\mathbb{D}$. Bref, comme annoncé lors de la pré-résolution de la dualité (point/translation) (partie 1.2.1 page 9), nous structurerons nos nombres à partir des composantes.

L'objet que nous structurons est dans $\mathbb{T}$, le produit cartésien des extensions ($\mathbb{E}$), des directions (Θ) et des signes ($\mathbb{S}$). Décrivons l'addition, la multiplication et la comparaison dans $\mathbb{T}$.

Présentation des composantes

Signes ($\mathbb{S}$) Le signe d'un nombre est soit +, soit -, soit +-. Dans $\mathbb{D}$, un nombre est soit "vers la droite" (+), "vers la gauche" (-) ou "au milieu" (+-). On a $\mathbb{S} = \{+, -, +-\}$. Avoir 3 signes pose problème ? Donnons nous une relation d'égalité large $=_1$ sur $\mathbb{S}$. Du point de vue de $=_1$, tous les éléments de $\mathbb{S}$ sont égaux à l'exception de + et -.

Directions (Θ) Θ contient au moins une direction θ_1. Dans $\mathbb{D}$, θ_1 est la direction horizontale.

Extensions ($\mathbb{E}$) $\mathbb{E}$ correspond (ontologiquement) à $\mathbb{R}^+$. Dans $\mathbb{D}$, l'extension d'un nombre x correspond à sa valeur absolue extension(x).

Triplets ($\mathbb{T}$) Les triplets $\mathbb{T}$ sont les éléments du produit cartésien $\mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S}$. Pour extraire la composante d'un triplet, posons : extension $\in \mathbb{E}^{\mathbb{T}}$, direction $\in \Theta^{\mathbb{T}}$, signe $\in \mathbb{S}^{\mathbb{T}}$ qui sont les fonctions telles que x = (extension(x),direction(x),signe(x)) pour tout nombre x. $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ strictement plus petit que $\mathbb{T}$. Par exemple, (3,θ_1,+-) n'appartient pas à $\mathbb{R}$. En effet, $\mathbb{R}$ est composé des triplets d'extensions non nulles associées aux signes + et - ; ainsi que du triplet $(0, \theta_1, +-)$. $\mathbb{R} = ((\mathbb{E} \backslash \{0\}) \times \{\theta_1\} \times \{+, -\}) \cup (0, \theta_1, +-)$. *Les nombres correspondent au produit cartésien des extensions non nulles par la constante θ_1 par les signes + et - ; auquel nous ajoutons le triplet (0, θ_1, +-)*

Schéma de l'addition, multiplication et comparaison

Notons $\bigoplus$, $\otimes$ et $\lessgtr$ les opérateurs logiques correspondant à + (l'addition), $\times$ (la multiplication) et $\leq$ (la comparaison) des nombres réels.

Addition L'addition $\bigoplus$ est la loi de (co-)composition définie sur $\mathbb{R}$ telle que : Soient $\vec{d_1} = (e, \theta, \sigma)$, $\vec{d_1}' = (e', \theta, \sigma') \in \mathbb{R}^2$

Si deux nombres ont le même signe ($\sigma =_1 \sigma'$), l'extension de leur somme est la somme de leur extension (e + e') et le signe de leur somme est le signe commun (σ). Si toutefois les nombres ont des signes différents ($\sigma \neq_1 \sigma'$), alors l'extension de leur somme est la soustraction de la plus grande extension par la plus petite (e - e' si e' < e) ; le signe de la somme est le signe du nombre ayant la plus grande extension (σ si e' < e). Enfin, la somme de deux nombres d'extensions égales (e = e') et de signes (strictement) distincts ($\sigma \neq_1 \sigma'$) donne le nombre (0,θ,+-) - tandis qu'ajouter (0,θ,+-) à un nombre ne change ni son signe, ni son extension. En conclusion, la comparaison des signes ($\sigma =_1 \sigma'$, $\sigma \neq_1 \sigma'$ ou $\sigma = +-$) et la comparaison des extensions (e' < e, e < e' ou e=e') créent plusieurs cas qui peuvent se résumer ainsi :

$$\vec{d_1} \bigoplus \vec{d_1}' = \begin{cases} (\text{e + e'}, \theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', (\sigma \neq +-) \\ (\text{e - e'}, \theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e' < e \\ (\text{e' - e}, \theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e < e' \\ (\text{e + e'}, \theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', (\sigma = +-) \\ (\text{e - e'}, \theta, +-) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e = e' \end{cases} \tag{1.4}$$

Ou encore, en utilisant seulement $\leq$ plutôt que (< et >) :

$$\vec{d_1} \bigoplus \vec{d_1}' = \begin{cases} (\text{e + e'}, \theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', \sigma \neq +- \\ (\text{e - e'}, \theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e' \leq e, e \nleq e' \\ (\text{e' - e}, \theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \nleq e \\ (\text{e + e'}, \theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', \sigma = +- \\ (\text{e - e'}, \theta, +-) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \leq e \end{cases} \tag{1.5}$$

où + et - sont deux sous-lois de composition et $\leq$ une relation définie sur $\mathbb{E}$ (extensions).

Comparaison La comparaison $\lessgtr$ est la relation définie sur $\mathbb{R}$ telle que : Soient $\vec{d_1} = (e, \theta, \sigma)$, $\vec{d_1}' = (e', \theta, \sigma') \in \mathbb{R}^2$

Dans $\mathbb{D}$, un nombre est plus grand qu'un autre si il est "plus à droite" qu'un autre. Autrement dit, la relation d'ordre est extraite du signe de la translation séparant deux points et donc au dernier niveau de l'architecture spatiale (["composantes" -> "translations" -> "points" -> "droite"] -> "points -> translations -> composantes") (extraction du signe de la translation séparant deux points). Avant d'arriver à une telle interprétation, la comparaison se définit directement sur les nombres :

$\vec{d_1} \lessgtr \vec{d_1}' \Leftrightarrow (\sigma = - \text{ et } \sigma' = +) \text{ ou } (e \leq e' \text{ et } \sigma =_1 \sigma' =_1 +) \text{ ou } (e' \leq e \text{ et } \sigma =_1 \sigma' =_1 -)$
Un nombre $\vec{d_1}$ est plus petit que $\vec{d_1}'$ si-et-seulement-si : soit le signe de $\vec{d_1}$ est - et le signe de $\vec{d_1}'$ est + ; soit $\vec{d_1}$ et $\vec{d_1}'$ ont un signe positif et l'extension de $\vec{d_1}$ est plus petite que l'extension de $\vec{d_1}'$; soit $\vec{d_1}$ et $\vec{d_1}'$ ont un signe négatif et l'extension de $\vec{d_1}'$ est plus petite que l'extension de $\vec{d_1}$

Multiplication La multiplication $\otimes$ est la loi de composition définie sur $\mathbb{R}$ telle que : Soient $\vec{d_1}, \vec{d1}' \in \mathbb{R}^2$

L'extension du produit de deux nombres est le produit des extensions ($e \times e'$). Le signe du produit de deux nombres est le produit de leur signe ($\sigma \times \sigma'$).
$\vec{d_1} \otimes \vec{d_1}' = (e \times e', \theta 1, \sigma \times \sigma')$
(1.6)
où $\times \in \mathbb{S}^{\mathbb{S} \times \mathbb{S}}$ est une multiplication de signes telle que :

$$\sigma \times \sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si} \quad \sigma' = + \\ \textit{opposé}(\sigma) & \text{si} \quad \sigma' = - \\ \text{+-} & \text{sinon} \quad (\sigma' = +-) \end{cases} \tag{1.7}$$

(Multiplier un signe s par le signe + ne change pas ce signe. Multiplier un signe s par le signe - change le signe s en son opposé. Multiplier un signe s par le signe +- change le signe s en +-)

où opposé est une fonction qui à un signe associe un signe ($\textit{opposé} \in \mathbb{S}^{\mathbb{S}}$) définie ainsi :

$$\textit{opposé}(\sigma) = \begin{cases} \text{-} & \text{si} \quad \sigma = + \\ + & \text{si} \quad \sigma = - \\ \text{+-} & \text{sinon} \quad (\sigma = +-) \end{cases} \tag{1.8}$$

(L'opposé de + est -. L'opposé de - est +. L'opposé de +- est +-)

Interprétation de ($\bigoplus, \otimes, \olessthan$) dans $\mathbb{D}$

$\bigoplus$ (Explication détaillée) La somme de deux nombres est déterminée par : (1) la comparaison des signes ; (2) la comparaison des extensions $\leq_{\mathbb{E}}$ (si les signes sont distincts). Si deux nombres ont le même signe, la co-addition $\bigoplus$ ne fait que joindre leur extension en préservant le signe. $+_{\mathbb{E}}$ s'interprète comme une *jointure d'extension*. Sinon, la comparaison $\leq_{\mathbb{E}}$ détermine lequel des nombres remporte le signe du résultat. $\leq_{\mathbb{E}}$ n'est qu'une certaine façon de regarder la jointure $+_{\mathbb{E}}$: $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = e'$. *(Pour tout e et e' deux éléments appartenant à l'ensemble des extensions, e est plus petit que e' si-et-seulement-si il existe une extension e" telle que e jointe à e" est égale à e')*. La soustraction précise quant à elle l'extension du résultat. La soustraction $-_{\mathbb{E}}$ extrait la tierce extension impliquée dans la comparaison : $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e - e'$ est définie et égale à e" ssi $e' + e'' = e$, où e" $\in \mathbb{E}$ (*si e est plus grand que e', la soustraction e-e' sélectionne la tierce extension impliquée dans la comparaison*). Parce que $-_{\mathbb{E}}$ dérive de $\leq_{\mathbb{E}}$ et $\leq_{\mathbb{E}}$ dérive de $+_{\mathbb{E}}$, alors seule la jointure $+_{\mathbb{E}}$ détermine la somme de deux nombres.

$\bigoplus$ (Interprétation dans $\mathbb{D}$) $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in \mathbb{R}^3, \vec{d1} \bigoplus \vec{d2} = \vec{d3} \Leftrightarrow \vec{d3}$ est le résultat des transferts de points correspondant à $\vec{d1}$ et à $\vec{d2}$ l'un après l'autre. Le point de départ est toujours l'origine O afin de faire correspondre $\vec{d3}$ à un point d'arrivée multipliant l'unité 1.

$\olessthan$ (Explication détaillée) La comparaison (ou relation d'ordre large) est définie à partir des mêmes briques logiques que $\bigoplus$ au niveau des composantes (i.e. $\leq_{\mathbb{E}}$ et donc $+_{\mathbb{E}}$). $\olessthan$ polarise l'espace en rendant les négatifs plus petits que les positifs ; la polarité s'obtient entre les nombres de mêmes signes en comparant leur extension. $\vec{d_1} \olessthan \vec{d_1}' \Leftrightarrow (\sigma = -$ et $\sigma' = +)$ ou $(e \leq e'$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 +)$ ou $(e' \leq e$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 -)$.

$\olessthan$ (Interprétation dans $\mathbb{D}$) $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in \mathbb{R}^2, \vec{d1} \olessthan \vec{d2} \Leftrightarrow$ le point de $\vec{d2}$ est à droite du point de $\vec{d1}$.

$\otimes$ (Interprétation détaillée) Puisqu'à $\vec{d_1} \otimes \vec{d_1}'$ correspondent $e \times e'$ et $\sigma \times \sigma'$. On en déduit :

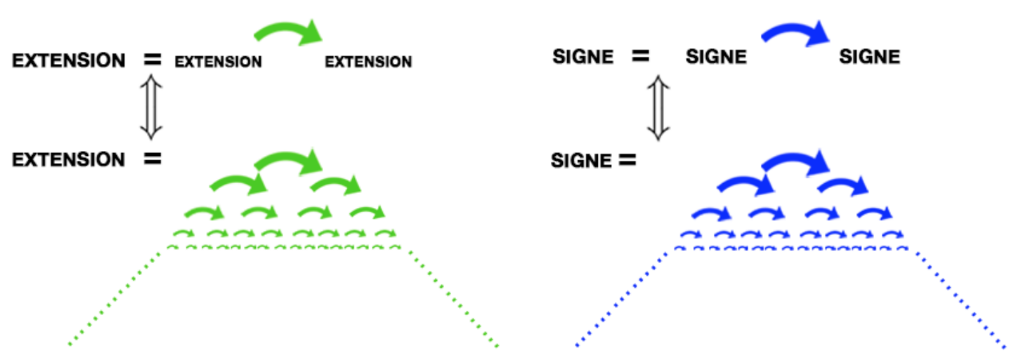

FIGURE 1.16 – Les extensions sont multiplicatives. Les signes sont multiplicatifs.

L'addition des extensions donne :

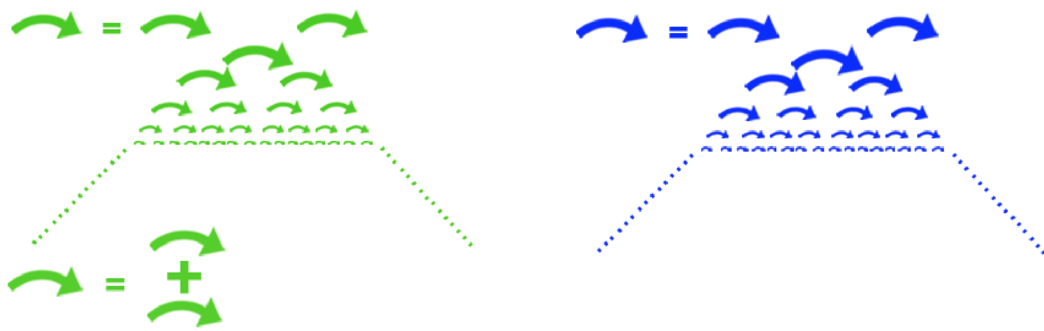

FIGURE 1.17 – Les extensions et les signes peuvent se composer. Les extensions se co-additionnent orthogonalement à la multiplication.

La multiplication est toujours interprétée comme le temps unitaire du nombre. À la fois objet-états et objet-transitions, les extensions et signes sont multiplicatifs. Lorsque nous regardons un point P de $\mathbb{D}$ comme la transformation grammaticale de 1 au temps t=1, nous identifions désormais : - une transformation du signe $+$; - une transformation de l'extension 1. La co-addition des extensions est toujours orthogonale à la multiplication. D'un côté, la jointure d'extension partitionne cumulativement l'espace, d'un autre la multiplication coule uniformément dans chacune des partitions (en re-partitionant ou refactorisant localement le temps). Le signe joue un double rôle. Multiplicativement, le signe change la symétrie de l'espace (vers la droite ou vers la gauche - ou au centre). Co-additivement, le signe fait se cumuler ou s'annuler les partitions de l'espace.

A propos des extensions dans $\mathbb{D}$ Dans $\mathbb{D}$, toute extension est ré-interprétée comme une transformation multiplicative de l'unité 1. L'ajout d'une extension e à elle-même n fois correspond à l'application de l'extension n à l'extension e. La division d'une extension e en q parties égales correspond à l'inversion de l'extension q composée à e (et à la représentation de $\frac{1\times e}{q}$, ..., $\frac{(q-1)\times e}{q}$). Dit autrement, la division d'une longueur en parties égales ($\frac{1}{b^i}$), la jointure réitérée de telles parties ($r_i = \frac{a_i}{b^i}$), et la jointure éventuellement infinie de telles constructions ($\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N} r_i$) - tout ces ingrédients constituant la grille de valeurs idéale de $\mathbb{D}$ sont ré-interprétés multiplicativement.

Les composantes maintenant justement intégrées au coeur de notre formalisme et de nos interprétations, parcourons les axiomes usuels pour faire correspondre le nombre-objet à $\mathbb{R}$.

1.3 Définition synthétique des nombres réels décomposés

Appelons nombres réels décomposés les nombres dont la définition couvre : - les axiomes des nombres réels usuels ; - la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$.

Nous avons décrit un langage qui a le potentiel de faire exister tous les ingrédients des axiomes des nombres réels dans un objet (en maintenant une expressionabilité dans $\mathbb{D}$). Désormais, il s'agit d'identifier un objet sélectionnant ses lois et ses instances d'après les axiomes des nombres réels à partir d'un domaine zéro-contrainte. Pour ça, il suffit d'intégrer les axiomes des nombres réels dans l'objet en utilisant notre langage. Une fois l'intégralité des axiomes définis sur l'objet, la syntaxe des nombres réels se distribuera sur tous les nombres (les instances de l'objet). En identifiant toutes les instances possibles (i.e. en fermant l'ontologie), nous aurons un couplage ontologico-épistémologique correspondant aux nombres réels.

1.3.1 Liaison des composantes entre elles

Les signes ($\mathbb{S}$) ont un univers déterminé (+, -, +-). Les signes sont multiplicatifs et sont structurés par la composition $\times_{\mathbb{S}}$. Les directions (Θ) disposent d'un seul élément θ_1 (l'horizontale). Les extensions ($\mathbb{E}$) sont multiplicatives et structurées par la (co-)jointure $+_{\mathbb{E}}$ et la composition $\times_{\mathbb{E}}$ (la comparaison étant posée à partir de $+_{\mathbb{E}}$ ainsi : $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = e'$.). Les extensions sont liées aux signes avec la règle qu'une extension est nulle ($0_{\mathbb{E}}$) si-et-seulement-si le signe du nombre est +-. Par suite, la définition des nombres réels prend la forme suivante :

Soit $\mathbb{S} = \{+, -, +-\}$
Soit opposé $\in \mathbb{S}^{\mathbb{S}}$:

$$oppose(\sigma) = \begin{cases} \text{-} & \text{si} \quad \sigma = + \\ + & \text{si} \quad \sigma = - \\ \text{+-} & \text{sinon} \quad (\sigma = +-) \end{cases} \tag{1.9}$$

Soit $\times \in \mathbb{S}^{\mathbb{S}\times\mathbb{S}}$:

$$\sigma \times \sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si} \quad \sigma' = + \\ oppose(\sigma) & \text{si} \quad \sigma' = - \\ \text{+-} & \text{sinon} \quad (\sigma' = +-) \end{cases} \tag{1.10}$$

Soit $\Theta = \{\theta_1\}$
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $\times$ et d'une loi de (co-)composition interne $+$.
Soit $\mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S}$ où $\times$ est le produit cartésien
Soient extension $\in \mathbb{E}^{\mathbb{T}}$, direction $\in \Theta^{\mathbb{T}}$, signe $\in \mathbb{S}^{T}$ telles que $\forall t \in \mathbb{T}$, $t = (extension(t), direction(t), signe(t))$
Soit $\mathbb{R}$ le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S}$ tel que :

(* axiomes restant à définir *)

$\forall x \in \mathbb{R}$ extension(x) = 0 $\Leftrightarrow$ signe(x) = +-

Note : Puisque l'ensemble des nombres est le plus grand possible, les signes + et - vont être associés à toutes les extensions non nulles ($\mathbb{E}\backslash\{0_{\mathbb{E}}\}$) possibles (spoiler : toutes) ; de plus, les extensions et signes sont tous associés à l'horizontale θ_1.

Enfin, les composantes sont liées dans $\oplus$, $\otimes$, $\circledleq$ qui se définissent sur les triplets.
Soient $x = (e, \theta_1, \sigma), x' = (e', \theta_1, \sigma') \in \mathbb{R}^2$

$$x \oplus x' = \begin{cases} (\text{e + e'}, \theta_1, \sigma) & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', \sigma \neq +- \\ (\text{e - e'}, \theta_1, \sigma) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e' \leq e, e \nleq e' \\ (\text{e' - e}, \theta_1, \sigma') & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \nleq e \\ (\text{e + e'}, \theta_1, \sigma') & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma', \sigma = +- \\ (\text{e - e'}, \theta_1, +-) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \leq e \end{cases} \tag{1.11}$$

$$x \otimes x' = (e \times e', \theta_1, \sigma \times \sigma') \tag{1.12}$$

$$x \circledleq x' \Leftrightarrow (\sigma = - \ et \ \sigma' = +) \ ou \ (e \leq e' \ et \ \sigma =_1 \sigma' =_1 +) \ ou \ (e' \leq e \ et \ \sigma =_1 \sigma' =_1 -) \tag{1.13}$$

Notation Pour différencier les propositions mathématiques concernant les composantes et les nombres, nous utiliserons :

— des indices ($0_{\mathbb{E}}$ pour les extensions, 0 pour les nombres par exemple)
— des noms de variables dédiés ($e, e', e'', e_1, e_2, e_3$ pour les extensions, x, y, z pour les nombres)
— une mise en page systématique (proposition sur les nombres, suivi de proposition sur les composantes, suivi d'interprétations)

1.3.2 Groupe additif

$\bigoplus$ est munie d'un élément neutre $\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \bigoplus 0 = 0 \bigoplus x = x$ [**1**]

$\exists 0_{\mathbb{E}}, \forall e \in \mathbb{E}, e + 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}} + e = e$. (+ admet un élément neutre noté $0_{\mathbb{E}}$ dans $\mathbb{E}$.) [**2**]
(Il existe une extension nulle qui peut être jointe à d'autres sans les modifier.)

Note : 0 =($0_{\mathbb{E}}, \theta_1$, +-)

(*Dans $\mathbb{D}$: l'origine O est un élément neutre pour l'addition.*) [**3**]

(*En général : il existe un élément neutre pour la co-addition.*) [**4**]

Analogie théologique : il existe un domaine zéro-contraine (Unbounded Telesis) capable de créer toutes les extensions et tous les signes, appelé Origine O. Une fois toutes les extensions et signes créés (t > 0), O devient la frontière entre positifs et négatifs.

Mise en page : [**1**] est l'axiome usuel qu'on souhaite ré-obtenir. [**2**] est l'axiome qu'on pose pour l'obtenir. [**3**] est l'interprétation des conséquences dans $\mathbb{D}$. [**4**] est l'interprétation des conséquences pour le nombre-objet général. Le même format est utilisé dans la suite. Pour ne pas encombrer la lecture, je place largement en annexe (A.2, page : 53) les preuves des liens entre [**1**] et [**2**].

Tout élément admet un opposé (élément symétrique pour $\bigoplus$) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x \bigoplus x' = x' \bigoplus x = 0$ [**1**]

Puisque $\mathbb{R}$ est le plus grand ensemble possible, $\forall x = (e, \theta_1, \sigma) \in \mathbb{R}$, $\exists x' = (e, \theta_1, oppos\acute{e}(\sigma)) \in \mathbb{R}$. Puisque de plus $(e, \theta_1, \sigma) \bigoplus (e, \theta_1, oppos\acute{e}(\sigma)) = (0_{\mathbb{E}}, \theta_1, +-) = 0$, aucun axiome n'est nécessaire pour cette section (l'opposé existe déjà). [**2**]

(*Dans $\mathbb{D}$: pour toute translation, il existe une autre translation qui l'annule. Les points associés sont de part et d'autre de l'origine.*) [**3**]

(*En général : pour toute partition cumulative de l'espace, il existe une partition substractive de l'espace.*) [**4**]

Analogie théologique : pour tout ajout de Bien possible, il existe un ajout de Mal possible. Pour toute nouvelle existence possible, il existe une nouvelle non-existence possible. Pour tirer une extension dans l'existence à partir de l'Origine O, il faut pouvoir créer son mirror négatif (création ex-nihillo) [10]

$\bigoplus$ est interne $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \bigoplus y) \in \mathbb{R}$. [**1**]

$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' \in \mathbb{E}$ [**2**]
(Deux extensions peuvent se joindre. Deux extensions se joignant définissent une extension.) (i.e. la jointure $+_{\mathbb{E}}$ doit bien être une loi de (co-)composition interne, aucun axiome supplémentaire n'est nécessaire.)

10. voir section "The boundary of a boundary is zero" *Cognitive-Theoretic Model of the Universe : A New Kind Of Reality Theory* page 10

$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists! e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)$ **[2]**
(Pour tout couple d'extensions, il existe une unique extension qui jointe à la première est égale à la seconde ou jointe à la seconde est égale à la première). (i.e. $\leq_{\mathbb{E}}$ est totale ainsi qu'une certaine condition d'unicité)

$(\forall e, e', \exists e'', e = e' + e'' et \exists e''', e + e''' = e' \Rightarrow e = e')$ **[2]**
(Un couple d'extensions dont la première est une partie de la seconde et la seconde une partie de la première est un couple d'extensions égales) (i.e. antisymétrie de $\leq_{\mathbb{E}}$) (Note : cette condition est remplacée par une condition plus commode page 24 grâce aux nouveaux axiomes établis à ce point)).

(*Dans $\mathbb{D}$: deux translations peuvent être sommées. La somme de deux translations est une translation. Le point-somme associé est le point d'arrivée de la translation-somme appliquée à l'origine O.*)[11] **[3]**

(*En général : toute partition cumulative ou substractive de l'espace (PCSE) co-additionnée à une PCSE résulte en une PCSE.*) **[4]**

Analogie théologique : tout nouveau Bien ou tout nouveau Mal (cosmologique) ajouté au Bien ou Mal (cosmologique) résulte en un Bien ou Mal (cosmologique).

$\bigoplus$ **est commutative** $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \bigoplus y = y \bigoplus x$. **[1]**

$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' = e' + e$. **[2]**
(*Joindre deux extensions se fait dans un ordre quelconque*) (propriété triviale du fait de la co-addition des extensions)

(*Dans $\mathbb{D}$: lorsque deux translations se réalisent l'une après l'autre, permuter leur ordre ne change pas la translation-somme. Le point-somme associé est toujours le même lorsque les translations sont sommées successivement à partir du point de départ O)*) **[3]**

(*En général : les partitions cumulatives ou substractives de l'espace se co-additionnent sans ordre particulier.*) **[4]**

Analogie théologique : les ajouts de Bien ou de Mal sont sommés sans ordre particulier.

$\bigoplus$ **associative** $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $x \bigoplus (y \bigoplus z) = (x \bigoplus y) \bigoplus z$. **[1]**

$\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3$, $e + (e' + e'') = (e + e') + e''$ (i.e. la jointure $+_{\mathbb{E}}$ est associative) **[2]**
(Les extensions sont co-jointes toutes ensembles au sein d'un temps, compatiblement avec toute ré-écriture de paires/sous ensembles d'extensions jointes. Joindre e et e'-jointe-à-e" donne une extension égale à e-jointe-à-e' jointe à e" : e + e' + e".) (propriété triviale du fait de la co-addition des extensions au sein d'un temps)

(*Dans $\mathbb{D}$: Le point-somme est déterminé par une liste de translations compatiblement avec des ré-écritures locales.*) **[3]**

(*En général : les partitions cumulatives ou substractives sont co-additionnées toutes ensembles simultanément au sein d'un temps, compatiblement avec des ré-écritures locales.*) **[4]**

11. À la fois des propriétés additives et à la fois des propriétés d'ordres (relatives à $\mathbb{E}$ i.e. aux extensions) sont impliquées dans le caractère interne de l'addition des nombres.

Analogie théologique : les ajouts de Bien ou de Mal sont sommés méta-temporellement et méta-spatialement au sein de Dieu [12].

Remplacement de l'antisymétrie de $\leq_{\mathbb{E}}$ par la "réci-absorbance" de 0 Simplifions la condition d'antisymétrie posée dans "$\bigoplus$ est interne" page 22.

~~$(\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists e'', e = e' + e'' et \exists e''', e + e''' = e' \Rightarrow e = e')$ (i)~~ $\Leftrightarrow$
$(\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, (e + e' = 0 \Rightarrow e = 0 \; ou \; e' = 0))$ (0 est "réci-absorbant" / 0 est le plus petit élément de $\mathbb{E}$) (ii)

~~*(Un couple d'extensions dont la première est une partie de la seconde et la seconde une partie de la première est un couple d'extensions égales) (i)*~~
$\Leftrightarrow$
(Si la somme de deux extensions est nulle, alors au moins l'une des deux est nulle / L'extension nulle est la plus petite extension) (ii)

1.3.3 (Corps) totalement ordonné

Les propriétés liées à la relation d'ordre paraissent évidentes pour le mathématicien qui conçoit la droite $\mathbb{D}$. Incidemment, puisque $\bigoplus$ utilise les mêmes briques logiques [13] que $\lessgtr$, $\lessgtr$ est à ce stade déjà logiquement déterminée. La section est faculative et permet simplement de solidifier l'interprétation de nos objets traduits dans le langage formel.

Note : Les axiomes traités dans cette section sont ceux d'un groupe totalement ordonné et non d'un (corps) totalement ordonné, mais deviendront ceux d'un (corps) totalement ordonné page 29 une fois le reste des parties (dont multiplication) traité.

Analogie théologique générale : Tout Bien ou Mal est comparable comme plus grand en Bien qu'un autre Bien ou Mal (comme sur un point de $\mathbb{D}$)

$\lessgtr$ est reflexive $\forall x \in \mathbb{R}, x \lessgtr x$. **[1]**

$\forall e \in \mathbb{E}$, e + 0 = e est déjà vérifié (Aucune nouvel axiome ne doit être ajouté) **[2]**

(Dans $\mathbb{D}$: un point est à droite de lui-même (à droite se définit au sens large)) **[3]**

(En général : les partitions cumulatives ou substractives sont aussi grandes qu'elles-mêmes (plus grandes qu'elles-mêmes au sens large)) **[4]**

$\lessgtr$ est antisymétrique $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \lessgtr y$ et $y \lessgtr x \Rightarrow x{=}y$ **[1]**

$(\forall e, e' \in \mathbb{E}^2$, e $\leq_{\mathbb{E}}$ e' et e' $\leq_{\mathbb{E}}$ e $\Rightarrow e = e')$ est déjà vérifié (cf. antisymétrie de $\leq$ /"réci-absorbance" de 0) (Aucun nouvel axiome ne doit être ajouté) **[2]**

(Dans $\mathbb{D}$: deux points vérifiant que le premier est à droite du second et que le second est à droite du premier sont identiques) **[3]**

12. Dans notre cas, les partitions cumulatives ou substractives de l'espace (PCSE) sont seulement sommées méta-spatialement, mais, le Bien et Mal s'exprimant dans le temps, il faut ajouter l'aspect méta-temporel dans l'analogie
13. (la jointure $+_{\mathbb{E}}$ et la comparaison associée $\leq_{\mathbb{E}}$)

(En général : une partition cumulative ou substractive de l'espace (PCSE) est la seule PCSE à la fois plus grande et plus petite qu'elle-même.) **[4]**

$\olessthan$ **est transitive** $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x \olessthan y$ et $y \olessthan z \Rightarrow x \olessthan z$ **[1]**

$\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3,\ e + (e' + e'') = (e + e') + e''$ (i.e. la jointure $+_{\mathbb{E}}$ est associative) (Aucun nouvel axiome ne doit être ajouté) **[2]**

(Dans $\mathbb{D}$: un point plus à droite qu'un second - qui est lui-même plus à droite qu'un troisième - est à droite de ce troisième point.) **[3]**

(En général : une partition cumulative ou substractive de l'espace (PCSE) plus grande qu'une seconde PCSE est plus grande que toutes les PCSEs plus petites que la seconde.) **[4]**

$\olessthan$ **est totale** $\forall x, y, \in \mathbb{R}^2, (x \olessthan y)$ *ou* $(y \olessthan x)$ **[1]**

$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e')$ ou $(e' + e'' = e)$. (i.e. $\leq$ est totale sur $\mathbb{E}$). (Aucun nouvel axiome à ajouter) **[2]**

(Dans $\mathbb{D}$: tous les points sont comparés sur la droite.) **[3]**

(En général : toutes les partitions cumulatives ou substractives de l'espace sont comparées.) **[4]**

Note : Tout ce qui est vrai pour les partitions cumulatives ou substractives de l'espace (PCSE) est vrai pour les temps unitaires par couplage.

Compatibilité de $\olessthan$ **avec** $\bigoplus$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, (x \olessthan y) \Rightarrow (x \bigoplus z \olessthan y \bigoplus z)$ **[1]**

(Aucun nouvel axiome à ajouter) **[2]**

(Dans $\mathbb{D}$: si un point d'arrivée est à droite d'un autre, translater les deux par le même vecteur $\vec{d3}$ préserve cette situation pour les nouveaux points d'arrivée.) **[3]**

(En général : ajouter la même partition cumulative ou substractive de l'espace (PCSE) à deux autres PCSEs ne changent pas leur comparaison.) **[4]**

1.3.4 Archimédien

Archimédien $\forall x, y \ogreaterthan 0, x \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y \olessthan nx$. **[1]**

$\forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e' \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, e \leq ne'$. **[2]**
(Version 1 : En ajoutant une extension non nulle à elle-même de manière réitérée, il est possible de la rendre plus grande que n'importe quelle extension)
(Version 2 : Les ensembles engendrés par deux extensions non nulles (qui s'ajoutent à elles-mêmes de manière réitérée, chacune dans leur ensemble) s'encadrent l'un et l'autre.[14]) (interprétation plus intéressante car le développement d'un nombre réel dans une certaine base s'appuie sur ce principe.[15])

14. En utilisant la terminologie de Poincaré, deux faisceaux d'extensions non nulles s'encadrent l'un et l'autre.

15. D'après la propriété, toute extension est placée au milieu d'une grille de valeurs (aussi fine que soit la largeur de maille choisie). Après avoir placé une extension au milieu de la grille des entiers, lui retirer l'entier à gauche a_0. Placer le reste au milieu d'une grille plus fine ($\frac{1}{b}$). Extraire a_1, retirer $\frac{a_1}{b}$. Etc...

(Dans $\mathbb{D}$: prenons deux points P1 et P2 strictement à droite de l'origine. Il est toujours possible d'ajouter P1 à lui-même de manière réitérée de façon à dépasser le point P2) [**3**]

(En général : toute partition cumulative ou substractive de l'espace (PCSE) est dépassable en cumulant des partitions cumulatives.) [**4**]

Analogie théologique : Tout Bien est dépassable par un ajout de Bien(s).

Corollaire théologique : Il n'existe pas de Bien suprême, mais seulement des degrés de Biens.

1.3.5 Introduction aux axiomes relatifs à $+, \times$ et $\leq$ restants

Jusqu'ici nous avons décrit l'Espace couplé aux signes. L'Espace est en accord avec l'espace décrit par Kant. *"Car d'abord, on ne peut se représenter qu'un seul espace ; et quand on parle de plusieurs espaces, on entend seulement par là les parties d'un seul et même espace. [...] L'espace est essentiellement un ; le multiple en lui, par conséquent aussi le concept général d'espace, tient uniquement à des limitations. [...] L'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée." (Immanuel Kant, Critique de la Raison Pure, 1ère édition, 1781. Théorie Élémentaire transcendentale, Esthétique transcendantale, I. De L'Espace).* Similairement à l'espace kantien, toutes nos partitions cumulatives d'espaces sont comme dans un seul et même espace, partitionnable, soudé et illimité. Dans le cadre des nombres, l'Espace kantien est couplé aux signes qui ajoutent une dimension cumulative ou substractive à l'espace. La relation d'ordre (couplée à l'Espace) compare les Espaces constitués. Passons désormais au Temps couplé aux signes et à L'Espace.

Multiplication en général La multiplication est analogue à un temps unitaire. Tantôt regardé comme un objet constitué (contenant éventuellement des partitions cumulatives ou substractives de l'espace), tantôt regardé comme le processus qui a constitué l'objet (multiplication de l'unité), tantôt regardé comme le processus général qui peut se redistribuer (potentiel multiplicatif). La pyramide totale correspond à la fois : - à l'objet-état constitué ($\simeq$ Espace-Temps) ; - au point P de la droite $\mathbb{D}$ multipliant l'unité ($\simeq$ Espace-Temps identifiant l'Espace propre) ; - au potentiel multiplicatif général impliqué dans une composition multiplicative ($\simeq$ Temps propre correspondant à divers Espace-Temps). La multiplication est le Temps d'une grammaire transformant l'espace. La multiplication correspond à l'aspect le plus général d'un nombre réel.

Multiplication sur la droite des nombres réels La droite des nombres réels $\mathbb{D}$ est l'analyse au temps t = 1 de la grammaire spatiale. La droite se temporalise à l'intérieur du temps t = 1 par un temps de parcours. Les co-additions sont parcourues librement comme des (additionnés/additionneurs) sous la forme de points et translations. L'espace se révèle infini, homogène et parcourable - mais figé. Parce que les co-additions sont dualisés et temporalisés dans $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ est mal compatible avec la multiplication. La multiplication dans $\mathbb{D}$ est obtenue dans l'Espace par la superposition de droites ou par des jeux de droites parallèles (voir page 5). La description de telles $\mathbb{D}$s est grandement superflue. Passons à la description générale de la multiplication.

Analogies théologiques [ou relation Temps et signe] les Biens et Maux sont sommés méta-spatialement et méta-temporellement en Dieu d'après l'associativité de l'addition. Puisque l'addition a déjà été atemporalisée, il n'y a donc pas de place pour un temps multiplicatif. La multiplication ne s'interprète pas en général dans une arithmétique du Bien et Mal. La multiplication des signes conserve une interprétation théologique. En découplant la signification de + en (Bien/Existence), la signification de - en (Mal/non-Existence), alors la multiplication des signes correspond à : - l'impératif pour l'individu particulier de faire exister le Bien ; - l'impératif pour l'individu particulier d'inhiber le Mal. - le choix de Dieu de faire exister le Bien ; - le choix de Dieu de détruire le Mal. En effet, Dieu s'identifiant au Bien (positif) applique un positif (Existence) au positif (Bien), Dieu applique un négatif (non-Existence) au négatif (Mal). L'homme étant créé à l'image de Dieu devrait suivre la même conduite localement, inhibant une tendance contraire résultant de la Liberté (existence de l'opposé). En ce qui concerne la multiplication des extensions, il paraît fort qu'elle ne corresponde pas l'arithmétique du Bien et Mal, mais se solidifie en grammaire transformant la quantité cumulative ou substractive (un langage bien répandu dans l'univers). Nous venons de décrire l'analogie théologique générale de la multiplication. Les analogies restantes seront soit philosophiques (liées au temps transformant l'espace cumulatif ou substractif), soit des précisions théologiques restantes.

1.3.6 Groupe (abélien) selon ($\otimes$, $\vec{1}$) avec $\vec{1} \neq \vec{0}$

$\otimes$ est commutative $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \otimes y = y \otimes x$ **[1]**

$\times_{\mathbb{E}}$ est commutative. **[2]**
(L'ordre dans lequel deux extensions se composent l'une-l'autre est indifférent.)

(Dans $\mathbb{D}$: (non représentable)) **[3]**

(En général : l'ordre des temps est indifférent.) **[4]**

Analogie philosophique : Absence de causalité entre différents temps de la grammaire spatiale (des nombres réels).

Il existe 1 neutre pour $\otimes$ tel que $1 \neq 0$ **et** $\forall x \in \mathbb{R}, x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$ **[1]**

$\times_{\mathbb{E}}$ admet un élément neutre 1 dans $\mathbb{E} \backslash \{0\}$ **[2]**
(Il existe une extension unité non nulle telle que toute extension est également la multiplication de l'unité par l'extension)
Remarque : finalement $1 = (1_{\mathbb{E}}, \theta 1, +)$

(*Dans $\mathbb{D}$: l'unité spatiale est un nombre dont l'extension est l'unité et dont le signe est +. Tout nombre est un rapport multiplicatif par rapport à cette unité. L'unité ne peut malheureusement pas être composée aux autres nombres (non représentable).*) **[3]**

(En général : il existe un nombre unité constitué d'une extension unité $(1_{\mathbb{E}})$ *couplée à l'unité temporelle (identité), couplé au signe positif +.)* **[4]**

Analogie philosophique/théologique : Grand Boum ; création d'un couplage ontologie/épistémologie déterminé à partir d'un Dieu Bon (signe positif). Le temps n'existe pas pour l'origine O seule (Unbounded Telesis), mais un Dieu Bon choisis de créer l'Univers au temps t=0 à partir de l'origine O (potentiel infini de Telesis). Pour t > 0, tous les nombres positifs sont l'image de l'unité et l'origine O devient la frontière entre Bien et Mal.

Sur la relativité de l'unité Dans nos représentations spatiales, l'unité peut être choisie arbitrairement. Dès lors, il semble curieux de considérer qu'il existe "une unité". Comment comprendre les différents choix possibles d'unité ? D'abord, dans notre théorie de la représentation, l'unité a plusieurs natures (temporelle, spatiale et théologique). Du point de vue de l'espace, l'unité 1 nous paraît relative. Du point de vue des signes, Dieu est toujours + (Existence/Bien/Conservation). Du point de vue du temps, Dieu est toujours l'identification à lui-même (identité). Autrement dit, par analogie théologique, Dieu s'identifie à lui-même comme Existence/Bien/Conservation. En ce qui concerne l'espace, plusieurs hypothèses peuvent être données. D'abord, puisque tout point P multiplie 1, et donc puisque Dieu se distribue dans toutes ses images, on peut supposer qu'il correspond symboliquement à $(t \mapsto tan(t\frac{\Pi}{2})(]0,1[) =]0,+\infty[$. Autrement dit, Dieu se potentialise comme tous les Biens possibles. Dieu (l'unité 1) peut aussi être compris comme l'idéal du Bien suprême rejeté à l'infini $+\infty$. Voilà la trace intemporelle de Dieu. Si Dieu correspond à l'espace infini (symétrisé), alors Dieu n'est plus relatif dans l'espace. Comment expliquer la relativité de l'unité localisée $(1,\theta_1,+)$? D'abord, puisque nous raisonnons dans l'espace infini, alors nous raisonnons (au moins) au temps t=1. En couplant un espace quelconque à l'identité temporelle, alors une unité spatiale particulière est choisie au temps t=1. Par définition de l'identité, une unité spatiale particulière (identique à celle choisie) devient l'unité au temps t=0. C'est-à-dire que l'unité localisée au temps t=0 se définit rétroactivement comme mesurée et identique à celle choisie au temps t=1 - par le couplage avec le temps identité. En se projettant hologiquement et multiplicativement dans toutes ses images, l'unité rétroactive correspond toujours pour t>0 à l'espace infini qui est invariant. Voilà pour l'existence d'une unité localisée. [16] La définition rétroactive de l'unité localisée permet

16. Christopher Langan, dans le cadre de réflexions sur la réalité étendant le *Cognitive-Theoretic Model of the Universe*, considère que Dieu est une identité, qu'Il s'attribue l'existence et qu'Il a créé le temps pour se générer rétroactivement. Dieu est cause rétroactive de son identité. Cette théorie correspond plus ou moins à notre situation. L'idée est une simples analogie, mais une éventuelle piste explicative.

de concilier : - le fait que la relation entre l'unité et les autres nombres est représentative d'un rapport entre deux grandeurs déterminées (nécessaire pour expliquer la multiplication générale des nombres c'est-à-dire leur Temps propre). - le fait que l'unité spatiale est unique (l'espace infini qui permet la définition rétroactive d'une unité de longueur par couplage avec le Temps et la Théologie).

$\otimes$ est interne $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \exists! z \in \mathbb{R}, x \otimes y = z$ [**1**]

$\times_{\mathbb{E}}$ est interne [**2**]
(*Évidence (cf. structure multiplicative des nombres), les extensions peuvent se composer et être appliquées les unes aux autres.*)

(*Dans $\mathbb{D}$: (non représentable)*) [**3**]

(En général : composer des transformations grammaticales de l'espace (Temps unitaires) résulte en une transformation grammaticale de l'espace (Temps unitaire).) [**4**]

Sur l'Espace propre La composition des temps et leur refactorisation en un seul temps permet de faire correspondre toute série de multiplications à un Temps propre qui correspond à un Espace propre sur la droite $\mathbb{D}$.

$\otimes$ est associative $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$. [**1**]

$\times_{\mathbb{E}}$ est associative. [**2**]
(*Composer l'extension e_1 à (e_3 composée à e_2) ($e_2 \times e_3$) résulte en la même extension que l'extension e_3 composée à (e_2 composée à e_1) ($e_1 \times e_2$). Par suite, l'ordre d'évaluation de telles multiplications n'a pas d'importance.*)

(*Dans $\mathbb{D}$: (non représentable)*) [**3**]

(En général : les temps se co-composent tous ensembles compatiblement avec des ré-écritures locales.) [**4**]

Un élément non nul admet un inverse $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \exists y \in \mathbb{R}, x \otimes y = y \otimes x = 1$. Si un tel y convient, il peut être noté x^{-1} [**1**]

Toute extension e $\in \mathbb{E} \backslash \{0\}$ admet un élément symétrique pour $\times$ dans $\mathbb{E}$. Notons le $\frac{1}{e}$. [**2**]
(Pour toute extension non nulle e, il existe l'extension 1/e qui composée à e, correspond à l'unité.)

Remarque : en considérant le signe, on a finalement $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ $x^{-1} = (\frac{1}{extension(x)}, \theta 1, signe(x))$
(Pour tout nombre décomposé, le nombre décomposé inverse a : - l'extension inverse de ce nombre ; - le même signe que ce nombre.)

(*Dans $\mathbb{D}$: (non représentable). Note : la "division en q parties égales" d'une extension e peut être interprétée comme l'inversion de l'extension q composée à e.*) [**3**]

(En général : le temps de multiplication est réversible.) [**4**]

Analogie théologique (impropre) : Dieu peut retourner au temps t=0. Il garde (+) l'existence du Bien (+), ou détruit (-) l'existence du Mal (-), et annule la quantité constituée au cours du temps (1/e). [17]

Analogie philosophique : le temps de la transformation grammaticale de l'espace est réversible.

1.3.7 Distributivité et compatibilité

$\otimes$ est distributive par rapport à $\bigoplus$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, (x \bigoplus y) \otimes z = (x \otimes z) \bigoplus (y \otimes z)$ **[1]**

$\times_{\mathbb{E}}$ est distributive par rapport à $+_{\mathbb{E}}$. **[2]**
(Les extensions, comme Temps unitaires de transformation, "coulent uniformément" dans les partitions cumulatives de l'espace (en re-partitionnant ou refactorisant leur temps))

(Dans $\mathbb{D}$: (non représentable)) **[3]**

(En général : les temps unitaires "coulent uniformément "dans les partitions cumulatives ou substractives de l'espace (PCSE), qui se repartitionnent ou refactorisent leur temps.) **[4]**

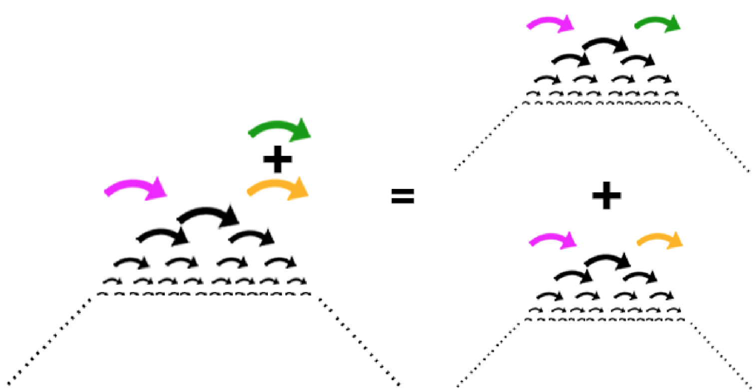

FIGURE 1.18 – La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Note : ces schémas sont des sommets de pyramide (qui admettent une pyramide à droite et à gauche dans un nombre), i.e. ce sont des Temps.

$\textcircled{$\leqslant$}$ est compatible avec $\otimes$ $\forall x, y \textcircled{$\geqslant$} 0, (x \otimes y) \textcircled{$\geqslant$} 0$ **[1]**

Propriété immédiatement vérifiée car elle se réduit à un problème de signe. Multiplier deux signes positifs donne un signe positif. [18]

(Dans $\mathbb{D}$: (non représentable)) **[3]**

(En général : faire écouler le temps uniformément dans des partitions cumulatives ou substractives de l'espace (PCSE) ne change pas leur comparaison sauf si le temps est négatif (passage à l'opposé).) **[4]**

17. L'analogie est impropre car revenir à t = 0 demande plus que la simple application de la multiplication inverse. Le passage de l'absence de temps (t=0) au temps t=1 est particulier (distribution hologique de 1 dans tous les nombres). En admettant une propriété d'Omnipotence, on peut imaginer une ré-absorption complète de toute la création (i.e. bel et bien revenir au temps t=0). Cependant, seule l'analogie philosophique correspond vraiment à la situation i.e. appliquer un nouveau temps permet de revenir à : - l'unité temporelle (identité) ; - l'unité spatiale localisée 1.

18. La propriété raconte des choses intéressantes à condition de considérer également la distributivité et la compatibilité de la comparaison avec l'addition cf. $(\vec{d_1} \ominus \vec{d_2}) \otimes \vec{d_3} \textcircled{$\geqslant$} \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{d_1} \otimes \vec{d_3}) \ominus (\vec{d_2} \otimes \vec{d_3}) \textcircled{$\geqslant$} \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{d_1} \otimes \vec{d_3}) \textcircled{$\geqslant$} (\vec{d_2} \otimes \vec{d_3})$

1.3.8 Distance et complétude

La distance d entre deux nombres réels x et y est : d(x,y) = extension(y $\ominus$ x). C'est l'extension qui sépare x et y.

Dans $\mathbb{D}$: La distance est extraite entre deux points. La fonction p (points) est telle que :

$$\begin{array}{ccccc} p & : & \mathbb{R} & \to & Imp \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ & & x & \mapsto & \begin{array}{ccccc} p(x) & : & \mathbb{R} & \to & Imp(x) \subset \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & (extension(y \ominus x), \theta 1, signe(y \ominus x)) \end{array} \end{array}$$

où $\forall x \in \mathbb{R}$, -x = (extension(x),direction(x), opposé(signe(x)) et $\forall x \in \mathbb{R}$, "$\oplus$ (- x)" peut être réécrit "$\ominus$x".

(Dans $\mathbb{D}$: il existe une fonction p qui a tout nombre de $\mathbb{R}$ associe une fonction p(x) qui associe elle-même a tout nombre de $\mathbb{R}$ une extension, une direction et un signe. p(x) est donc un point "devenu indépendant" de l'origine O)

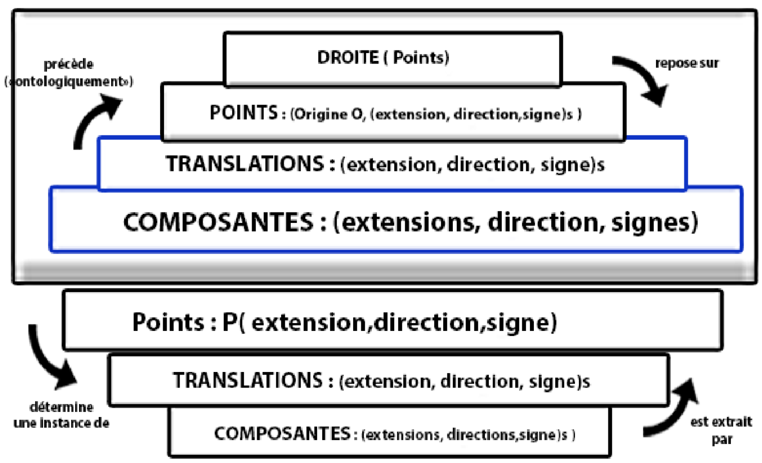

FIGURE 1.19 – Les points distribuent des translations et des composantes entre eux (hiérarchie descendante supposant donnée la hiérarchie montante)

$\mathbb{D}$ est maintenant bien munie de points entre lesquels les éléments de $\mathbb{E}, \Theta, \mathbb{S}$ se distribuent. Conformément à l'introduction intuitive de la relation entre points et composantes (partie 1.2.1, page : 9) : - (1) les composantes canoniques (séparant le nombre de l'origine) sont incluses dans le point (cf. le x dans le point p(x)). - (2) le point est inextensif car il est relationnel et se comporte comme une origine translatée. La distance d des nombres réels devient telle que d(x,y)= extension(p(x)(y)) = extension(y $\ominus$ x). La distance n'est donc pas strictement issue d'une norme | . | = extension(.) comme dans le langage formel usuel, mais elle correspond à la distance issue de cette norme modulo l'omission du point p(x). La fonction p couvre dans $\mathbb{D}$: - l'inextensibilité du point ; - l'invariance de l'espace par changement d'origine ; - l'extraction entre les points des distances et des relations de comparaison.

Complétude de $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ est complet car toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$, i.e. toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall\epsilon > 0, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, |u_n - u_{n+p}| < \epsilon$ vérifie qu'il existe l $\in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\epsilon > 0, \exists No \in \mathbb{N}\forall n > No, |u_n - l| < \epsilon$. [**1**]

$\forall(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$
($\forall\epsilon \in \mathbb{E}\backslash\{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, (max(e_n, e_{n+p}) - min(e_n, e_{n+p}) \leq \epsilon)$)
$\Rightarrow$
($\exists l \in \mathbb{E}$, $\forall\epsilon \in \mathbb{E}\backslash\{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, (max(e_n, l) - min(e_n, l) \leq \epsilon)$)
où on a posé :
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2$, max(e,e') = e et min(e,e') = e' $\Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e' + e'' = e$
[**2**]

(Pour toute suite d'extensions u dont les termes deviennent arbitrairement proches les uns des autres sur des voisinages de $+\infty$ des indices de la suite, il existe une extension limite l telle que les termes de u sont arbitrairement proches de l sur des voisinages de $+\infty$ des indices de la suite. D'ailleurs, l'extension l est structurée par les lois de compositions et relations définies sur les extensions comme les autres (car elle appartient à l'ensemble des extensions).)

(Dans $\mathbb{D}$: tout point est un nombre car il peut être approximé) [**3**]

(En général : constructivisme du lien entre un point et l'unité sur $\mathbb{D}$ par la méthode d'approximations. Tout point de $\mathbb{D}$ conçue comme une droite infinie dans l'espace est bien un nombre.) [**4**]

Analogie théologique : La droite est l'image du Bien et du Mal.

Commentaires finaux

Kant écrivait à propos du temps :

> *"comme cette intuition intérieure n'a aucune figure, nous cherchons à suppléer à ce défaut par l'analogie, et nous représentons la succession du temps par une ligne qui pourrait se prolonger à l'infini, dans laquelle la diversité compose une série qui est d'une seule dimension ; et nous dérivons des propriétés de cette ligne toutes celles du temps, une seule exceptée : c'est que les parties de la ligne sont simultanées, tandis que celles du temps sont toujours successives".*

Immanuel Kant, Critique de la Raison Pure, 1ère édition, 1781
Théorie Élémentaire transcendentale, Esthétique transcendantale, II. Du Temps

Le temps spatialisé de Kant, adapté à la physique Newtonienne, ne permettait pas de concevoir les nombres réels. Pourtant, comme un retournement comique de situation, nous concluons nos travaux par le fait que la droite infinie représente les nombres. N'avons-nous fait aucun progrès par rapport à notre droite initiale (page 8) ? N'avons-nous fait aucun progrès par rapport à la ligne de Kant ?

D'abord, la droite infinie est désormais couplée au Temps. (1) Une unité spatiale particulière est couplée à l'unité temporelle (l'identité). (2) Tout nombre possède un Temps propre qui transforme l'unité spatiale particulière en son Espace propre sur la droite infinie. (3) Le Temps propre s'applique à divers Espaces en général. Parce que les Temps se refactorisent, toute composition des Temps correspond à un Temps propre et donc à un Espace propre. Les nombres correspondent à des couplage Espace-Temps.

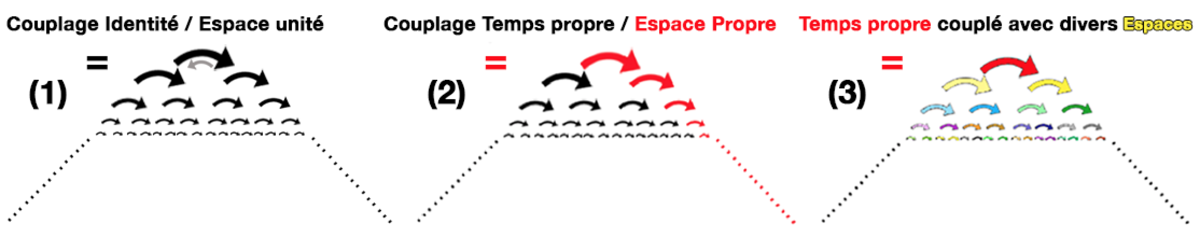

FIGURE 1.20 – (1) Les nombres s'appuient sur un couplage entre l'identité et un Espace unité. (2) L'Espace unité se détermine rétroactivement comme l'Espace transformé par le Temps propre en Espace propre. (3) Le Temps propre inclus dans les nombres s'applique à divers Espaces (cf. relativité de l'unité choisie).

Ensuite, le Temps et l'Espace sont couplés à la Théologie. (1) Le Temps est conservateur, destructeur ou absorbant. (2) L'Espace est cumulatif ou substractif. (3) Les nombres sont comparés par la relation d'ordre.

Signe	Temps ($\times$)	Espace ($+$)	Relation d'ordre ($\leq$)
+	Conservateur	Cumulatif (Existence)	Orientation de la relation "plus grand"
-	Destructeur	Substractif (Anti-existence)	
+-	Absorbant		

Les constantes peuvent être interprétées par analogie théologique :

Constante	1	0
Avant tout Temps (t=0)	Dieu s'identifiant (1) (rétroactivement) [19] au Bien (+)	Potentiel infini de Telesis
Dans le temps (t>0)	Unité particulière déterminée.	Frontière entre Bien et Mal
Trace dans le temps (t>0)	Source de tous les Espaces propres et Temps propres positifs : $]0, +\infty[$ Idéal de Bien : $+\infty$	

19. L'identification prend sens dans le temps. Le Bien (+) prend sens en opposition au Mal (-).

1.4 Conclusion

Un jour je me suis demandé si les nombres réels existaient. Je me suis convaincu avec un stylo. En comparant la longueur du stylo et ma taille, je trouvais qu'il aurait été un théorème incroyable que ma taille corresponde exactement à une longueur divisant mon stylo en parties égales ajoutée à elle-même un certain nombre de fois. Il était clair que ma taille et la longueur du stylo étaient le même genre de choses, et aussi que je pouvais approximer l'une par l'autre. En divisant la longueur du stylo en un nombre toujours plus grand de parties égales, je me donnais une grille de longueurs qui pouvait sans soucis être utilisée pour se rapprocher toujours plus près de ma taille en les ajoutant. Je me suis convaincu que les nombres réels existaient, parce qu'ils étaient des longueurs comparées à une unité.

Même si je concevais bien les nombres réels, ils m'échappaient d'autre part. Tandis qu'il était clair que je pouvais prendre ma taille et l'ajouter à toute autre longueur, tandis qu'il était clair aussi que je pouvais diviser ma taille en parties égales, je n'arrivais pas à la multiplier. J'ai résolu ce problème à l'époque en me disant que ma taille se multipliait à d'autres longueurs à l'aide d'un rectangle. Puisque l'aire d'un rectangle est censée être un nombre réel, alors ma taille pouvait bien multiplier d'autres longueurs - en jouant le rôle d'un des côtés. Plus tard, je cherche à vérifier si une aire est bien un nombre réel. Je me convainquis en fixant la hauteur d'un rectangle que l'ensemble des aires qui ont une telle hauteur fixée sont bien des nombres réels. D'abord, les longueurs et les aires paraissent être un même genre de choses - des extensions. Ensuite, une fois le côté du rectangle fixé, alors seule l'autre côté détermine l'aire. En ajoutant ou en divisant en parties égales le côté libre, des aires se joignent ou se découpent en parties égales de façon tout à fait similaire. Ayant une aire de multiplication (ma taille fois une autre longueur), et une aire de nombre réel (la droite, construite avec la longueur de mon stylo comme unité, élargie en aire par une autre longueur de mon stylo), alors je pouvais désormais multiplier ma taille et évaluer le résultat par rapport à mon stylo (en comparant les aires).

Muni d'une multiplication dans l'espace qui me manquait plus tôt, je voulais désormais vérifier que les nombres que j'avais identifiés et enrichis d'opérations dans l'espace correspondaient bien à des nombres réels. Mon intuition que ma taille était un nombre réel s'appuyait sur une opération analogue à un développement de la longueur de mon stylo dans une certaine base pour atteindre ma taille. Je voulais plutôt vérifier que toutes les opérations et attentes d'une définition adéquate des nombres étaient vérifiées. Je cherchais alors à me démontrer que mon système d'aires satisfaisait les axiomes des nombres réels. Il fallait ajouter des signes aux longueurs et aux aires. Il fallait même multiplier au moins trois nombres et donc élargir le tout aux volumes - que je choisissais de généraliser. J'avais fait de grands progrès conceptuels de mon point de vue, car la multiplication dans l'espace était avant un parfait mystère. En réalité, je remplaçais simplement le mystère d'absence de multiplication entre longueurs par le mystère d'une opération magique ramenant une aire quelconque à une aire de hauteur unité. La complexité du système le rendait d'ailleurs peu utilisable.

Puisque j'avais développé mon goût pour appliquer les axiomes à l'espace, je décidais de ré-écrire les axiomes des nombres avec des triplets d'extensions, directions et signes plutôt qu'avec de simple variables. Les extensions, directions et signes me rapprochaient de l'espace. Je résumais dans ce procédé le problème à une préservation des vérités valables sur des nombres réels vers des vérités valables sur des triplets. Le système formel des triplets, bien que lourd en certains détails, apportait quelques aspects simplificateur. De plus, je pouvais décrire des extensions qui se joignaient comme je le concevais, je pouvais décrire le signe (comme ajouté aux extensions dans un deuxième temps). Enfin, je pouvais garnir mes exposés formels d'interprétations dans un langage spatial. Avec systématisme, je décrivais les interprétations utiles comme celles forcées. Abandonnant l'idée d'utiliser les aires pour la multiplication, je me concentrais sur une autre trouvaille. Les multiplications pouvaient être comprises comme des processus.

Puisque ma taille est un nombre réel par rapport à mon stylo (comprendre la longueur de mon stylo) [20], alors la transformation de mon stylo en ma taille "porte l'information" du nombre réel que ma taille représente. Puisque je ne m'intéresse qu'à l'information numérique que représente ma taille, alors ma taille peut être comprise comme le processus qui transforme mon stylo en ma taille. Si ma taille "sait transformer" mon stylo en elle-même, alors ma taille peut re-transformer une autre longueur. Par exemple, compressons les dimensions de l'univers jusqu'à ce que ma taille corresponde exactement à la longueur de mon stylo. En regardant les longueurs environnantes par rapport à la longueur de ma taille, je les regarde comme avant par

20. abréviation ré-utilisée par la suite

rapport à la longueur de mon stylo. Si je reproduis la longueur que ma taille avait du point de vue de l'univers original dans l'univers compressé, alors ma taille (reproduite à l'original dans l'univers compressé) correspond maintenant à ma taille (perçue par ma taille compressée). De plus, cette même taille (reproduite à l'original dans l'univers compressé) correspond maintenant à la longueur de ma taille multipliée par la longueur de ma taille (perçue par mon stylo compressé). Du point de vue de mon stylo qui a vu les deux transformations, ma taille (reproduite à l'original dans l'univers compressé) est maintenant ma taille multipliée par ma taille. Le processus peut être répété pour toute autre longueur afin de multiplier cette longueur par ma taille du point de vue du stylo. J'avais fait des progrès selon moi car tout se faisait désormais au niveau des longueurs et donc sur la droite des nombres réels sans aires. Malgré tout, j'avais seulement remplacé l'opération magique ramenant une aire quelconque sur une aire de hauteur unité en une opération magique qui permettrait à mon stylo de voir à "l'intérieur de ma taille".

Un autre problème venait du fait que les nombres étaient dispersés en de multiples objets : points de la droite des nombres, translations qui ajoutent ces points et processus multiplicatifs. Je ne m'occupais pas trop des points et des translations car ils se ressemblaient et correspondaient à des triplets d'extensions, directions et signes. La multiplication en revanche était d'un autre registre. Un processus transformant des extensions, directions et signes ne pouvait pas correspondre à des extensions, directions et signes figés tels que je les concevais. Dès lors, je devais tout comprendre comme des processus et ça me gênait car un processus "transforme quelque chose". Et ce quelque chose correspond à un nombre tout comme le processus. Lorsque ma taille transforme mon stylo, il existe bien une taille et un stylo, pas seulement un processus qui transforme mon stylo en ma taille. Je n'avais pas d'autres choix que d'accepter ce problème pour avancer.

Une solution se présenta pour identifier un nombre à la fois à un processus et à "quelque chose" d'identifié. Je me rendis compte qu'en faisant l'hypothèse que ma taille et mon stylo étaient deux processus, je pouvais leur attribuer deux autre objets. À ma taille, je lui associe une mini taille de départ et une mini taille d'arrivée. À mon stylo, je lui associe un mini stylo de départ et un mini stylo d'arrivée. Ma taille (en tant que processus) transforme le stylo en ma taille, tout comme cette taille (en tant que processus) transforme la mini taille de départ en une mini taille d'arrivée, tout comme ce stylo (en tant que processus) transforme le mini stylo de départ en mini stylo d'arrivée. Ma taille, mon stylo et ma taille (en tant que processus) deviennent le même genre de chose. Tout est la même chose et donc le nombre est à la fois ce qui transforme et ce qui est transformé. Reste le problème de la mini taille de départ et de la mini taille d'arrivée (et du mini stylo de départ et du mini stylo d'arrivée). En dessinant la progression des processus s'appliquant les uns aux autres avec des flèches, je me rendis compte que l'objet que j'imaginais pouvait exister si je supposais que les processus transformaient récursivement jusqu'à l'infini. En mathématique, on manipule sans problèmes des suites qui sont des objets se perdant jusque dans l'infini. Lorsque je fais converger le sommet de mon processus jusque dans l'infini, j'y vois un objet qui pourrait très bien être ce qui ce cache derrière ma taille (que je vois à la fois fixe et dynamique) ou mon stylo (que je vois fixe).

La pyramide faisait le pont entre les deux notions dont j'avais besoin. Si je prétends que ma taille est une pyramide, alors je peux la regarder à la fois comme un objet déterminé et à la fois comme un processus (le sommet) qui l'identifie par rapport à mon stylo. De même pour le stylo qui s'identifie par rapport à lui-même. Je décrivis alors comment l'extension et le signe étaient des pyramides. Je décrivis comment l'addition s'intégrait dans les pyramides multiplicatives. Je décrivis comment une pyramide n'était déterminée que par son sommet dont la logique se distribuait récursivement. Et ainsi j'arrivais à parler de nombres comme des transformations (le processus transformant mon stylo en ma taille). J'avais fait des progrès mais tout restait globalement assez dispersé, avec des multiplications, des additions et des nombres à la fois transitions et objets.

Durant mes réflexions, je cherchais à comprendre ce que voulait dire que quelque chose existe (et le rapport de l'espace au nombre). Emmanuel Kant, qui m'avait fait découvrir l'espace pur de la géométrie, tenait pour existant l'Espace et le Temps (en tant que formes nécessaires à toutes les intuitions). Le Temps était d'ailleurs grandement réductible à une ligne dans l'Espace. L'Espace était pour moi un domaine incroyable qui acceuillait directement la géométrie et indirectement la logique et la temporalité. C'était dans l'Espace de Kant que je me représentais deux extensions, l'une analogue à ma taille, l'autre analogue à la longueur de mon stylo. Quelle réalité pour mes représentations dans l'espace ? Comment pouvaient-elles correspondre aux nombres réels ? La théorie des ensembles n'avait rien de spatial et donc pas grand chose à me proposer. Malgré quelques efforts je n'y trouvais pas mes réponses. En tombant sur le *Cognitive-Theoretic Model of the Universe* de Christopher Michael Langan, je trouvais de nombreux éléments qui nourissaient des réflexions.

En particulier, la création d'objets à partir d'un domaine zero-contrainte, la présence de plusieurs syntaxes connectées à travers la logique, et la présence d'un langage général chef d'orchestre (G.O.D.). Je percevais alors clairement le langage spatial et le langage formel comme deux syntaxes linguistiques différentes décrivant les nombres. Je comprenais aussi comment les mathématiques pouvaient s'appliquer à l'univers, sans lui faire perdre ses couleurs (qualio-perceptual syntax), émotions (emo-telic syntax), ou dans mon cas... l'espace étendu que je concevais et explorais. La conséquence est que je savais que je ne cherchais pas la "nature générale" des nombres, mais seulement une cognition harmonieuse de ces derniers dans des syntaxes particulières. Introduisant des terminologies linguistiques dans mon document, je séparais désormais le langage spatial du langage formel des axiomes. Je visais désormais un langage général des nombres qui contrôlait à la fois le langage formel et le langage spatial. Un jour, dans un podcast de monsieur Langan, vint l'idée que le Temps était une fonction.

Regarder la taille et le stylo comme des temps à plusieurs avantages. D'abord, il existe éventuellement des temps antérieurs qui expliquent le temps présent. Ensuite, il existe des temps futurs qui généralisent le présent. Précisément, le choix de l'unité du stylo configure l'espace (t=0) et la taille tout comme le stylo sont maintenant au temps (t=1). Autrement dit, le temps a transformé le stylo en la taille intrinsèquement (par lui-même, par découpage de l'espace, par composition d'autres temps, etc...). Par le terme intrinsèquement, je veux dire que, tout comme la taille "contient" l'espace qui l'identifie, la taille contient le temps la séparant du stylo. Dans cette image, le temps n'est pas séparé de l'espace mais est couplé à l'espace. L'addition est alors identifiée à une co-addition (partition de l'espace), et la multiplication à l'écoulement d'un temps unitaire déterminé. La composition multiplicative et la co-addition sont intégrées dans des pyramides qui symbolisent l'espace temporalisé. La pyramide est regardée comme le processus transformant (objet-transition particulier $\simeq$ Espace-Temps), le résultat de processus (objet-état $\simeq$ Espace propre), ou potentiel multiplicatif (objet-transition général $\simeq$ Temps propre). Le lien entre le stylo et la taille est expliqué par : - l'identification du stylo à l'unité (t=0) ; - l'application du temps de la taille au stylo (t=1). Comment expliquer le couplage espace-temps ?

Tout part de l'identité. Lorsque je me représente l'Espace, je me représente une grandeur infinie donnée dont une détermination d'Espace peut être obtenue par limitation de la grandeur infinie. C'est dans cet espace infini que la taille et la longueur du stylo sont deux grandeurs en rapport l'une avec l'autre. Dans l'espace infini, rien n'est un nombre. En couplant une détermination particulière (le stylo), avec le temps identité (soit l'unité de la représentation sous sa forme temporelle), alors tous les espaces deviennent couplés à des temps. Le concept développé dans ce document est que : - le couplage de l'identité avec une longueur unité librement choisie sélectionne rétroactivement la longueur identique au temps t=0. - la longueur au temps t=0 (avant tout temps)[21] se distribue aux temps $t > 0$[22] dans tous les nombres avec leur Temps unitaire caractéristique. Les nombres ont un Espace propre obtenu par application de leur Temps propre à l'unité. - l'image de cette longueur particulière aux temps $t > 0$ est : - (1) la droite infinie invariante par changement d'unité. - (2) l'unité de longueur choisie (le stylo). Parce que la limitation d'espace est déterminée à t=0, alors tous les nombres aux temps $t > 0$ ont un Espace propre correspondant à leur Temps propre (rapport entre l'Espace unité et leur Espace). Ma taille (en tant qu'Espace) a été transformée intrinsèquement de mon stylo (t=0) en ma taille (t=1). De plus, la taille est couplée à son temps qui est un rapport entre deux déterminations spatiales. La relativité de l'unité spatiale de la droite des nombres réels pousse à considérer que le Temps propre est un invariant du nombre. Le Temps propre doit être couplé à l'Espace pour être quelque chose, mais ne dépend pas de l'Espace. Par suite, le Temps propre de la taille peut s'appliquer de nouveau à tout autre nombre. L'Espace obtenu par l'application de la taille à un autre nombre correspond à un Espace propre mesuré par un Temps propre par rapport au stylo. Voilà le progrès : ma taille est un nombre réel par rapport à mon stylo qui peut être multiplié à tout autre nombre. Le problème initial est résolu, mais disposons nous de nombres réels ? Le Temps intrinsèque de l'Espace explique le lien entre l'unité de longueur (le stylo) et la longueur du nombre (la taille), mais la Théologie complète la configuration des nombres réels.

La Théologie s'interprète avec deux dimensions. D'abord, il y a l'interprétation "avant tout temps" et l'interprétation "une fois le temps créé". Ensuite, il y a l'interprétation psychologique (Bien et Mal) et l'interprétation quantitative (arithmétique des quantités). Les extensions doivent être munies de signes. Le signe + (pour les nombres positifs), - (pour les nombres négatifs) et +- (pour 0). Avant tout temps, +- est généralement un potentiel infini. La notion est naturelle car, en pratique, 0 est réputé contenir tous les signes et tous les arguments (directions des nombres complexes). +- s'identifie au domaine zero-contrainte (Unbounded Te-

21. Puisque le temps est une fonction unitaire, alors t=0 signifie "aucune application de la fonction", et donc avant tout temps.
22. Puisque le temps est une fonction unitaire, alors $t > 0$ signifie t=1 ou t=2 etc ...

lesis) du *Cognitive-Theoric Model of the Universe* (CTMU). +- sépare l'existence (+) contre la non-existence (-). Puisque l'existence se réalisera dans des degrés (différentes extensions), alors + s'identifie au Bien. Le Bien correspond au self-selection parameter υ du CTMU. Avant tout temps (t=0), l'unité se définit comme extension unité ($1_{\mathbb{E}}$) et signe positif (+), ce qui s'interprète comme un Dieu qui désire exister en s'identifiant à un être Bon (rétroactivement). Grand Boom au temps t>0 avec distribution hologique de la structure du Temps, de l'Espace et de la Théologie à partir de l'unité. Une fois le temps créé à partir de l'origine, - (le Mal) est créé symétriquement au Bien (+). Le Mal correspond à l'existence du complémentaire, et à Dieu qui cherche à s'identifier comme Bon. La temporalité des 3 signes s'interprète comme une Conservation (+), une Destruction (-) ou une Absortion (+-). Multiplicativement, le signe de l'unité (+) est obtenu en Conservant (+) le Bien (+), ou Inhibant (-) le Mal (-). L'unité, parce qu'elle se transforme dans tous les points de la droite, se stratifie et peut être identifiée à Dieu créant des degrés de Biens et leurs Maux symétriques (conséquence de l'existence de l'opposé / Liberté). D'autres considérations montrent que la droite infinie est l'image du Bien et du Mal. Sur cette droite, la trace de l'unité originelle se retrouve dans $(t \mapsto tan(t\frac{\Pi}{2})(]0,1[) =]0,+\infty[$ (quelle que soit l'unité spatiale particulière choisie). Autrement dit, Dieu se potentialise comme tous les Biens possibles. Dieu (en tant qu'image méta-temporelle de l'unité 1) peut être conçu rejeté à l'infini $+\infty$ (l'idéal du Bien suprême). Voilà pour l'analogie du Bien et du Mal. Passons à l'arithmétique des quantités.

Les signes créent des partitions cumulatives (signe +) ou substractives (signe -) co-additionnées dans l'espace. Les nombres de signes opposés annulent la plus petite extension dans la plus grande, tandis que les nombres de même signe partitionnent cumulativement leur extension. Les axiomes des nombres réels complètent les détails : partitions de l'espace co-additionnées compatiblement avec des ré-écritures locales, composition des temps commutative compatible avec des ré-écritures locales, temps réversible, temps distributif suivant les partitions de l'espace, espace archimédien, continuité de l'espace. Toute cette dynamique des nombres s'applique sur la droite infinie des nombres réels. Une fois que le Temps identité 1 se couple à une extension et un signe positif (l'unité), alors tous les Temps intrinsèques à l'espace sont couplés à une extension et un signe. Le parcours de la droite suivant des (points/translations) explore les partitions cumulatives ou substractives de l'espace (PCSEs) des différents nombres. Les potentiels multiplicatifs (évolution vers des temps ultérieurs) permettent la multiplication des nombres en général. L'hypothèse du continu et la propriété d'Archimède permettent de construire tout point imaginable sur la droite comme un nombre (avec une séries d'approximations (propriété d'Archimède) qui convergent vers un nombre (hypothèse du continu)). Réciproquement, tout nombre peut être identifié à un point de la droite (existence d'une série d'approximations et donc d'une place dans la grille de valeur idéale de la droite). La droite est l'image des nombres réels.

Pour récapituler, une fois les nombres existants comme des Temps dans l'Espace instanciés selon une certaine Théologie, ils sont munis de multiplications (Temps), d'addition (Espace), conservatrices, destructrices ou absorbantes (Théologie appliquée au temps), cumulatives ou substractives (Théologie appliquée à l'espace), ordonnées sur une direction en plus ou moins grands Bien (Théologie de la relation d'ordre). L'interprétation de la signature usuelle des nombres se fait comme suit : + (Espace), $\times$ (Temps), $\leq$ (Théologie) ; 0 (Unbounded Telesis), 1 (Dieu). Aucune des significations des signes ne vient de l'espace ou du temps [23], et j'en conclus que la Théologie est un troisième élément explicatif naturel de la représentation des nombres.

23. Une droite dans l'espace a naturellement deux orientations possibles qui peuvent jouer le rôle de + et -. Malheureusement, les deux orientations possibles jouent des rôles parfaitement symétriques dans l'espace, tandis que les deux signes + et - ont des dynamiques temporelles différentes.

Quelle est l'histoire finale de la relation entre ma taille et (la longueur de) mon stylo ? En manipulant le stylo avec des partitions cumulatives d'espace, alliées à un principe limité de réversibilité du temps (division en parties égales), alors je construisais ma taille comme l'objectif d'un processus d'approximation par un développement de mon stylo. Quelques propriétés de l'espace étaient considérées comme naturelles comme la propriété d'Archimède ou une forme de continuité. J'appliquais un temps externe à l'espace pour passer d'une détermination de longueur à une autre. Le temps externe représentait ma taille suivant le stylo. Une fois le temps externe obtenu, je n'arrivais pas à le multiplier car il était homogène à un temps externe et non à un Espace. L'Espace que j'utilisais était l'espace de Kant.

> *"L'espace est une représentation nécessaire à priori, qui sert de fondement à toutes les intuitions extérieures. On ne peut jamais concevoir qu'il n'y ait aucun espace, quoiqu'on puisse fort bien penser qu'aucun objet n'y est contenu. L'espace est donc considéré comme la condition de la possibilité des phénomènes, et non comme une détermination qui en dépende. C'est donc une représentation à priori qui est le fondement nécessaire des phénomènes extérieurs. [...] on ne peut se représenter qu'un seul espace ; et quand on parle de plusieurs espaces, on entend seulement par là les parties d'un seul et même espace. Ces parties ne pourraient même pas précéder l'espace unique et universel, comme parties d'un tout qu'elles serviraient à composer par leur ensemble ; elle ne peuvent, au contraire, être conçues qu'en lui. L'espace est essentiellement un ; le multiple en lui, par conséquent aussi le concept général d'espace, tient uniquement à des limitations. [...] L'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée. Un concept général d'espace (qui est commun au pied et à l'aune) ne peut rien déterminer sous le rapport de la quantité. Sans l'illimitation dans le progrès de l'intuition, nul concept de rapport n'emporterait un principe de l'infinité de cette intuition.*

Immanuel Kant, Critique de la Raison Pure, 1ère édition, 1781
Théorie Élémentaire transcendentale, Esthétique transcendantale, I. De L'Espace, Extraits choisis

L'espace de Kant, partitionnant librement une grandeur infinie donnée, m'avait donné tous les éléments pour représenter les extensions de la droite des nombres réels usuelle. Ajoutant mécaniquement les signes (à droite et à gauche d'une origine), j'avais obtenu une représentation des nombres réels privée de multiplication.

Le nombre est en fait constitué, à l'intérieur du nombre, d'un couplage d'Espace-Temps et Théologie. En identifiant mon stylo à l'unité temporelle au temps t=1, alors il se détermine rétroactivement comme unité spatiale au temps t=0. Cette unité, génératrice de toutes les couplages Temps propre et Espace propre de la droite, se transforme par un temps interne en ma taille. La conséquence est que le rapport multiplicatif entre l'unité spatiale (mon stylo) et ma taille se retrouve à l'intérieur de ma taille - qui dispose d'un Temps unitaire (de transformation d'espace) couplé à son Espace. Ma taille est un Espace-Temps qui multiplie mon stylo dont l'Espace a été couplé au Temps Unité. Ma taille peut multiplier d'autres nombres en multipliant leur Espace avec son Temps. Désormais, la multiplication par ma taille du point de vue de l'unité devient naturelle. En effet, tout multiplié-fois-[ma taille] est à t=2 par rapport à ma taille se trouvant à t=1. Parce que les temps se composent, t=2 se compresse en un certain t=1, c'est-à-dire à un Temps propre possédant un Espace propre sur la droite. Tout multiplié-fois-[ma taille] est à un certain t=1 par rapport à mon stylo se trouvant à t=0, tout comme ma taille est à t=1 par rapport à mon stylo se trouvant à t=0. Les signes que j'intégrais mécaniquement rénovaient en fait le Temps (conservateur, destructeur ou absorbant), l'Espace (cumulatif ou substractif) et la relation d'ordre (en déterminant l'orientation). La logique des signes et de leur relation à l'Espace-Temps se comprend dans un modèle élémentaire de Théologie. [24]

Les nombres obtenus couplent la droite des nombres réels et les axiomes des nombres réels. On peut espérer créer des liens heureux entre deux définitions usuelles des nombres. Les nombres obtenus couplent ontologie et épistémologie, c'est-à-dire qu'ils : - identifient toutes les instances particulières des nombres (ontologie) ; - sont stables pour tous les prédicats et situations génératrices des nombres réels. De plus, les nombres obtenus couplent : - le langage spatial holistique et unitaire (censé être une spécialité de l'hémisphère droit) ; - le langage formel analytique et fragmentaire (censé être une spécialité de l'hémisphère gauche). On peut espérer avoir établi une définition centralisée des nombres aux caractéristiques cognitives larges et satisfaisantes.

24. Les essais sur l'interprétation théologique des nombres démontrent la pertinence du registre pour supporter leur interprétation. Comme illustré, une cosmogonie s'interprète particulièrement bien au sein des nombres décomposés si : - elle admet l'existence d'une création à partir d'un Dieu Bon s'identifiant comme tel ; - elle intègre une psychologie du Bien et du Mal. Si Dieu s'identifie à $+\infty$ (Bien transcendant), alors la divergence vers $+\infty$ pourrait symboliser un appel à la culture du Bien et une prévention contre le Mal. Le *Cognitive-Theoretic Model of the Universe* est une théorie de la réalité qui présente des caractéristiques similaires.

Lectures, sources et influences

- Ressources en ligne (Axiomes des nombres réels -https ://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/Axiomes.pdf ; construction des nombres réels et équivalence à isomorphisme près : https ://www.lpsm.paris/pageperso/roux/enseignements/1213/capes/reels.pdf) ; Histoire des mathématiques (The Mathematical Experience, Philip J. Davis and Reuben Hersh, 1981). Magazine (numéro 59, "La droite", Tangente) ; Vidéos (3Blue1Brown, Euler's formula with introductory group theory.) *pour évaluer la définition actuelle des nombres réels*
- Emmanuel Kant - Critique de la raison pure (1781), *pour l'espace décrit comme forme de notre intuition externe. Ce document est une tentative d'intégration des nombres réels dans l'espace kantien.*
- Henri Poincaré, Des fondements de la géométrie (1898). *Une sortie hors de l'espace kantien, et une entrée vers l'espace structuré librement par de l'algèbre.*
- Bosse des maths (La), Quinze ans après, Stanislas Dehaene (2010). *Tout objet mathématique se donne dans un contexte cognitif. 3 n'est pas homogène à 1000. La définition des nombres décomposés est un objet qui se branche au-dessus de nombres positifs (que j'interprète comme "sans signe" de part mes travaux), logarithmiques et "animaux" qui formeraient la base innée du concept de nombre.*
- Christopher Michael Langan - The Cognitive-Theoretic Model of the Universe : A New Kind of Reality Theory (2002). *The Critique of Pure Reason with less Space, more physics and more Theology, having quite convincingly described reality as a conscious, metaphysival and purposeful self-distributed entity.*

Partie 2

Fonctions réelles d'une variable réelle

De même que le nombre réel est associable à un point sur la droite des nombres réels, une fonction réelle d'une variable réelle est associable à un ensemble de points dans le plan (son graphe). Le graphe d'une fonction est un objet holistique et unitaire qui centralise naturellement une définition des fonctions réelles. Quelle définition d'une fonction est obtenue à travers sa représentation spatiale ?

2.1 Introduction sur les fonctions réelles d'une variable réelle

Une fonction réelle d'une variable réelle est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifiant une certaine condition d'unicité. Plus précisément, soit un sous-ensemble $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, G est une fonction réelle d'une variable réelle si et seulement si :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in G^2, (x = x' \Rightarrow y = y')$$

(Littéralement : Pour tout (x,y) et (x',y') deux couples de nombres réels appartenant à l'ensemble G, si x est égal à x', alors y est égal à y')
(Autrement dit, G est une fonction réelle d'une variable réelle si G est un ensemble de couples de nombres réels qui vérifie que tout nombre réel dans la première composante est associé à au plus un nombre réel dans la deuxième composante.)

Puisqu'une fonction réelle f est un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, une fonction réelle lie des nombres réels à des nombres réels. Une fonction réelle n'est pas une relation symétrique de $\mathbb{R}$ avec lui-même. Quelle est la différence entre les éléments dans la première composante (les 'x's) et les éléments dans la deuxième composante (les 'y's) ? Principalement, pour tout x dans une fonction, il existe toujours un seul y associé au x. Dès lors, y peut s'écrire suivant la fonction f et l'élément x. Par suite, un y peut être appelé l'image d'un x par f et peut s'écrire f(x) (en ayant éventuellement plusieurs tels 'x's). Le champ lexical le plus répandu pour capturer la relation des 'x's aux 'y's est celui d'une transformation. x appartient à un ensemble de départ et y à un ensemble d'arrivée. f est alors associée à une transformation déterministe qui dépendrait d'un paramètre de départ x. Dans cette analogie, le paramètre x produit différentes valeurs d'arrivée 'y's selon, et le déterminisme supposé de la transformation garantit qu'un seul y est associé à un x et donc que le lien entre x et y est conforme à un couple (x,y) d'une fonction. A noter que dans ce contexte, la fonction f n'est pas l'objet qui transforme x en y, mais c'est l'unité de connaissance qui joint x et y **malgré** la transformation qui les sépare. En tant que forme très générale de connaissance, une fonction réelle d'une variable réelle modélise d'autres relations de nombres réels entre eux. En particulier, une fonction est appropriée pour décrire la subordination de grandeurs physiques au temps et à l'espace dans le contexte de la physique classique. Dans ce contexte, les 'x's se comprennent comme des supports, et les 'y's comme des valeurs se distribuant sur les supports.

Pour toute fonction f, on définit l'ensemble de définition D_f et l'image Im(f). Ce sont respectivement tous les 'x's qui admettent un y et tous les 'y's qui admettent un x. D_f et Im(f) ne sont pas des objets détachés de f qui parcoureraient tous les 'x's et les 'y's pour se constituer. Une fonction f se définit sur des ensembles de nombres réels ainsi :

$$\forall X \in \mathscr{P}(D_f), f(\cup_{x \in X}\{x\}) = \cup_{x \in X}\{f(x)\}$$

(Pour toute fonction réelle f, l'image d'un ensemble X est un ensemble égal à l'union des images par f des éléments de X.)

Puisque f est un morphisme sur les ensembles selon l'union $\cup$, D_f et Im(f) sont bien attachés à f. On a en particulier f(D_f) = Im(f)

2.2 Principe général de représentation des fonctions

Comment représenter un nombre réel dans l'Espace ? En se donnant un repère (une origine, une extension unité, une direction et une orientation), chaque nombre est associé à un point le long d'une droite. La droite la plus usuelle $\mathbb{D}$ est un peu comme une règle graduée dont les graduations se prolongent dans l'infiniment grand et infiniment petit. Plus précisément, la droite $\mathbb{D}$ projette les nombres réels sur des développements dans certaines bases en préservant leur relation d'ordre et leur distance. Comme il a été présenté dans le premier chapitre, la droite usuelle est contenue dans un nombre algébriquement conforme à un corps archimédien totalement ordonné et complet ($\mathbb{R}$,$\bigoplus$,$\bigotimes$, $\lessdot$,|.|). Au temps t=1, le nombre général correspond à la droite $\mathbb{D}$ qui associe à tout nombre réel un point. En outre, la droite des nombres réel se pose naturellement dans un espace à 3 dimensions qui permet de construire différentes droites identiques suivant n'importe laquelle de ses directions. L'espace est dit "à 3 dimensions" car il est supposé que 3 droites "indépendantes linéairement" sont nécessaires et suffisent à repérer tout point de l'espace. Tout point se décrit de manière unique par 3 coordonnées qui se lisent sur les axes d'un repère. En particulier, en se donnant un repère orthogonale, la relation d'un point à ses coordonnées est intuitive car ses coordonnées sont obtenues en construisant entre l'origine O et le point considéré un "cube" s'appuyant sur les axes du repère. En se donnant de plus un repère orthonormé, tous les axes ont un impact identique sur la distance 3-dimensionnelle qui se définit entre toute paire de points.

Puisque l'Espace euclidien usuel lie trois droites des nombres réels entre elles, il représente des éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En particulier, en se donnant seulement un repère constitué de deux droites, il représente des éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Représente-t-il des sous ensembles de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Des sous ensembles de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se définissent en posant des conditions restrictives sur le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Quelle est la condition restrictive qui correspond à une fonction réelle ?

Une fonction réelle n'est pas une relation symétrique de $\mathbb{R}$ à lui-même. Dès lors, nous devons distinguer deux droites des nombres réels (correspondant aux 'x's et 'y's respectivement). Mettons les 'x's (ou abscisses) sur un axe horizontal orienté avec les positifs à droite ; mettons les 'y's (ou ordonnées) sur un axe vertical orienté avec les positifs en haut. Dans le contexte d'une fonction réelle, pour toute abscisse x, il peut exister au plus une ordonnée y qui correspond à x. Dès lors, une fonction réelle correspond à un filtre d'exclusion qui autorise la sélection d'au plus un point par abscisse x. Le filtre d'exclusion recouvre une droite verticale passant par l'abscisse x. La règle du filtre est que seulement un point peut être sélectionné dans le filtre. Le fait qu'un tel filtre vertical se distribue dans le plan (i.e. sur toutes les abscisses du plan) définit la représentation spatiale d'une fonction réelle en général.

2.3 Représentation des fonctions s'appuyant sur $\mathbb{D}$

Une représentation usuelle d'une fonction est une représentation qui s'appuie sur un repère orthonormé avec une origine O, un axe "horizontal" orienté avec les positifs à droite et un axe "vertical" orienté avec les positifs en haut (correspondant respectivement à l'axe des abscisses et des ordonnées). La représentation des fonctions s'appuyant sur $\mathbb{D}$ est caractérisée par le fait que les axes sont constitués de droites de nombres réels usuelles $\mathbb{D}$.

Résumé sur la droite des nombres réels usuelle $\mathbb{D}$ La droite des nombres réels usuelle correspond à un objet $\mathbb{D}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{D}, x \in \mathbb{D}$$

($\mathbb{D}$ est un ensemble)

$$\textit{Les points de } \mathbb{D} \textit{ sont séparés par des longueurs.}$$

($\mathbb{D}$ admet "une distance")

$$\textit{Les points de } \mathbb{D} \textit{ se comparent } (\textit{l'un est plus } \text{à} \textit{ droite que l'autre})$$

($\mathbb{D}$ est "ordonné")

Les points de $\mathbb{D}$ sont sur une certaine grille de valeurs.

$$\forall x \in \mathbb{D}, \exists s \in \{0,1\}, \exists a_0 \in \{0,1,2,...,1000,...\}, \exists b \in \mathbb{N}, b > 1, \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1,...,b-1\}^{\mathbb{N}},$$

$$x = (-1)^s (a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + ...) = (-1)^s \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

(Les éléments de $\mathbb{D}$ admettent des développements dans certaines bases)

les propriétés sont en outre rassemblées dans un même médium linguistique fondé sur la navigation dans l'espace.

Les axes sont donc regardés en tant qu'ils expriment la relation d'ordre des nombres réels et leur distance. De plus, les points sont dans une certaine grille de valeur (qui leur attribue en particulier leur signe).

Quelques propriétés relatives à la relation d'ordre

La relation d'ordre définit des intervalles sur les axes. Les intervalles I sont des ensembles délimités par deux nombres réels a=inf(I) et b=sup(I) - et qui contiennent tous les nombres entre a et b (ou a est plus petit que b) . a et b peuvent être inclus ou non et cela donne : - des intervalles ouverts (a et b non inclus) ; - fermés (a et b inclus) ; - ni ouverts ni fermés (cas restants). Les intervalles ou encore des unions d'intervalles $\cup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ permettent de définir de nombreux cas de fonctions.

D'abord le filtre vertical qui impose la sélection d'exactement un point sur une abscisse donnée, ou *filtre de définition*, indique que l'abscisse appartient au domaine de définition d'une fonction réelle. Distribuer ce filtre sur des intervalles permet de définir des sous ensembles sur lesquels une fonction est définie. Dans certains cas, le domaine de définition d'une fonction (l'ensemble des abscisses sur lequel le filtre de définition se distribue) se décrit bien avec des intervalles. Similairement, le filtre horizontal qui impose la sélection d'au moins un point sur une ordonnée donnée traduit l'appartenance d'une ordonnée y à l'image d'une fonction f. Dans certains cas, l'image d'une fonction f (l'ensemble des ordonnées sur lequel le filtre de sélection horizontale se distribue) se décrit bien avec des intervalles.

Ensuite, une fonction f peut conserver une relation d'ordre entre des abscisses et les ordonnées correspondantes. La conservation de la relation d'ordre se distribue sur des abscisses. La fonction est dite monotone sur les abscisses concernées (strictement ou non strictement monotone suivant que la relation d'ordre est stricte ou large ; croissante/décroissante suivant que la relation d'ordre est conservée ou inversée lorsqu'on passe des abscisses aux ordonnées). Si une fonction est strictement croissante sur un ensemble d'abscisses par exemple, cela signifie qu'un point à gauche est toujours plus bas qu'un point à droite sur ces abscisses.

Quelques propriétés relatives aux signes

Les signes lient les nombres x et -x pour tout x car ils sont la seule composante qui les différencie. En effet, les nombres x et -x ont la même extension mais des orientations/signes différents. x et - x sont de part et d'autre de l'origine O. Si pour tout couple d'abscisses de la forme x et -x, les ordonnées correspondantes sont exactement de la forme y et -y, alors la fonction est dite impaire (symétrie centrale). Si pour tout couple d'abscisse de la forme x et -x, il existe une seule ordonnée correspondante y, alors la fonction est paire (symétrie axiale par rapport à (Oy)).

Quelques propriétés relatives à la grille de valeurs

Les grilles de valeurs identifient des abscisses et ordonnées particulières. L'intervalle [a,b] peut ainsi être déclaré être exactement [0,1] ou encore [0, π] par exemple. En spécifiant à la fois une abscisse et une ordonnée, une fonction peut être définie ponctuellement . Si f passe par (0,1) par exemple, cela signifie f(0)=1. Dans une certaine mesure, la grille de valeur peut être employée pour définir certaines fonctions. Par exemple, la fonction affine f passant par (0,b) et (1, b + a) est telle que f(x) = ax + b pour tout x. Mais il ne s'agit dans ce cas que d'identifier la fonction parmi une famille de fonctions grâce à des valeurs particulières.

Quelques propriétés relatives à la distance

Une distance permet de caractériser des couples de nombres par des grandeurs continues (plutôt que par des booléens comme le fait la relation d'ordre). En particulier, la distance définit des intervalles autour de points et par suite des voisinages [1]. Par exemple, une boule fermée centrée en a de rayon ϵ est l'ensemble des points dont la distance à a est inférieure ou égale à ϵ. B(a,ϵ) = { M $\in \mathbb{R}$, d(a,M) $\leq \epsilon$ } = [a-$\epsilon, a+\epsilon$]. Une boule ouverte serait telle que : B(a,ϵ) = { M $\in \mathbb{R}$, d(a,M) $< \epsilon$ } =]a-$\epsilon, a+\epsilon$[(les extrémités sont exclues).

Continuité en x0 $\in$ I non trivial $\subset$ Df

Continuité en x0 à gauche, à droite, les deux (par défaut) La continuité en une abscisse x0 caractérise un comportement d'une fonction pour des abscisses dans "l'infini entourant x0". Naturellement, dès lors, pour définir la continuité en x0, il faut se donner x0 dans un intervalle sur lequel la fonction est définie. Soit x0 quelconque dans I non trivial [2] $\subset$ Df , f est continue (à gauche, à droite, les deux (par défaut)) en x0 si la limite à gauche, à droite ou à droite et à gauche de x0 est égale à f(x0) (respectivement).

Illustration

Prenons d'abord le cas de la continuité à droite et à gauche (cas par défaut).

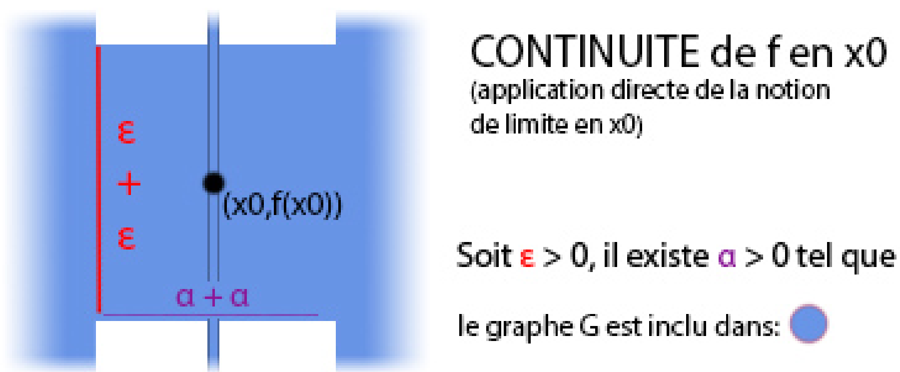

FIGURE 2.1 – Continuité en x0 illustrée en appliquant directement la notion de limite

Le filtre bleu est un filtre d'inclusion qui impose que la fonction G appartienne au filtre (ou encore, que la fonction G soit exclue de la partie blanche). La notion de limite est basée sur la famille de filtres indexée par ϵ illustrée. La notion de limite en x0 caractérise le comportement de la fonction dans l'infini autour de l'abscisse x0. Dès lors, la continuité n'affirme rien en x0 et rien non plus à une abscisse autour de x0. En effet, α est arbitrairement petit pour tout ϵ et donc n'importe quelle abscisse x1 distincte de x0 est dans la partie libre du graphe à l'extérieur de]x0-α, x0 + α [\{ x0 } [3] - qui est la seule tranche d'abscisses impliquée dans la propriété. Dans le cas de la continuité, il est imposé que la limite en x0 soit L = f(x0) et donc la fonction est par hypothèse définie et localisée en l'abscisse x0 en laquelle la limite est énoncée. Le filtre pour la continuité est donc plus simplement :

1. Un voisinage de x0 est un ensemble qui contient un ouvert qui contient x0. Un voisinage contient ainsi toujours l'infini qui entoure un x0.
2. I non trivial signifie non réduit à {x0}. Si I est trivial, alors il n'est pas possible de regarder la fonction dans l'infini qui entoure x0. La fonction doit être définie dans l'infini entourant x0 pour la continuité (éventuellement seulement à droite ou à gauche de x0).
3. *(l'intervalle délimité par x0-α et x0+α ; privé de x0)*

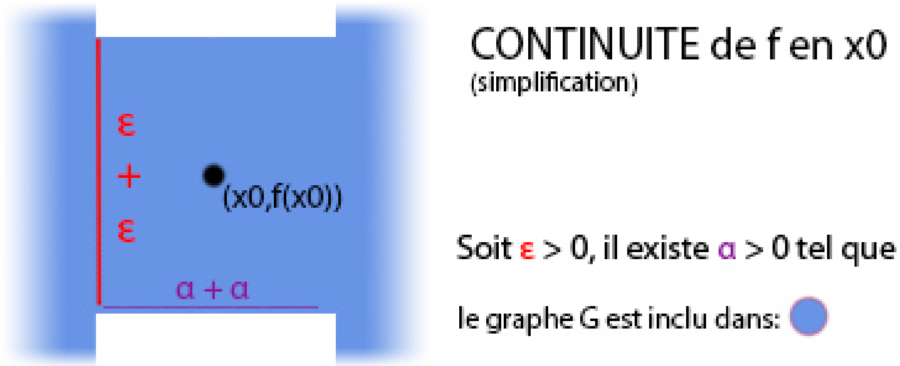

Figure 2.2 – Continuité illustrée en simplifiant.

Un cas de continuité à gauche donnerait :

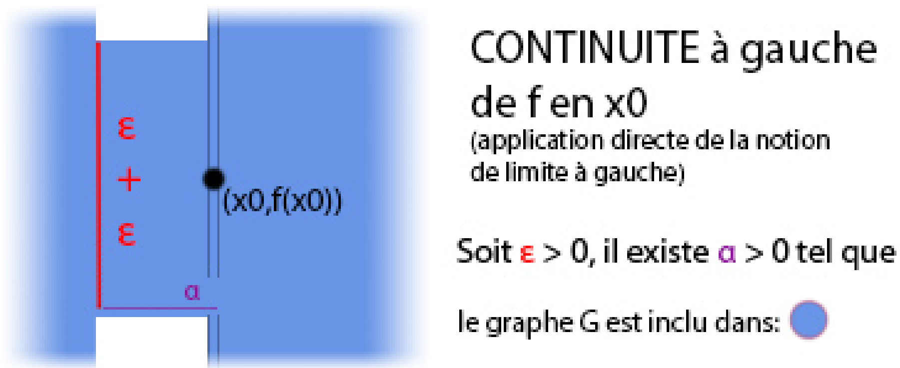

Figure 2.3 – Continuité à gauche de x0 illustrée en appliquant directement la notion de limite

Remarque sur les illustrations Les illustrations ne représentent pas universellement la notion continuité qui est conçue sur des espaces beaucoup plus généraux, mais elles résument bien la propriété comme l'absence d'un saut. En effet, seul un saut soudain d'ordonnée commençant dans l'infini à côté d'une abscisse x0 peut contredire la continuité en x0.

Sur la description ou définition des fonctions

Avec de telles propriétés graphiques, il est possible : - de manipuler les propriétés entres elles en les combinant ; - de décrire une fonction particulière en distribuant les propriétés graphiques d'une façon vraie pour cette fonction particulière.
A noter qu'une fonction particulière peut déjà être définie graphiquement avec les propriétés abordées en distribuant des valeurs constantes sur des intervalles d'abscisses (la fonction est alors définie sur ses intervalles et ses ordonnées sont les valeurs constantes distribuées).

2.4 Représentation des fonctions s'appuyant sur $(\mathbb{R}, \bigoplus, \bigotimes, \otimes, |.|)$

Certaines propriétés des fonctions réelles d'une variable réelle s'appuient sur des opérations algébriques relatives à l'addition ou à la multiplication. Pour représenter de telles propriétés, les axes doivent être munis de la structure de $(\mathbb{R}, \bigoplus, \bigotimes, \otimes, |.|)$.

Quelques propriétés relatives à $\bigoplus$

La T périodicité d'une fonction affirme que $f(x + T) = f(x)$ pour tout x. Autrement dit, l'ajout réitéré de T à une abscisse ne change pas l'ordonnée correspondante. La période T est quelconque et est donc relative à une addition en général.

Quelques propriétés relatives à ⓧ

Une fonction affine se caractérise par le fait que pour tout point de la fonction G, tous les autres sont obtenus en translatant l'ordonnée par le coefficient directeur a multiplié par la translation d'abscisse - pour toutes les translations d'abscisses possibles.

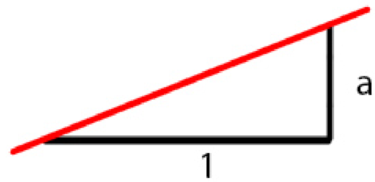

FIGURE 2.4 – Une fonction affine (en rouge) de coefficient directeur a.
Les différences d'abscisses sont transformées en différences d'ordonnées avec le principe multiplicateur ⓧ.

2.5 Représentation des fonctions s'appuyant sur divers objets dans le plan

Certaines propriétés des fonctions réelles d'une variable réelle ne dérivent pas directement des propriétés des axes, mais s'appuient sur de multiples configurations se produisant dans le plan.

Quelques propriétés relatives à l'aspect

Continuité sur I Si une fonction G est continue sur I, alors pour toute abscisse x0 de I, G vérifie la propriété de continuité en x0. Globalement, le graphe peut être interprété comme un trajet "continu" (que peut suivre un objet ponctuel se déplaçant des abscisses les plus négatives aux plus positives sans "saut" brusque d'ordonnée). L'aspect continu est un concept qui regroupe de multiples propriétés dont le fait qu'aucun saut d'ordonnée n'est réalisé dans aucun infini entourant une abscisse - dont le théorème des valeurs intermédiaires - dont le fait qu'une borne supérieure est atteinte sur un intervalle fermé, etc...

Quelques propriétés relatives aux relations entre fonctions

Fonction réciproque Soit G le graphe d'une fonction admettant une fonction réciproque ayant un graphe G^{-1}. Par définition d'une fonction réciproque, $(x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G^{-1}$. Si un point P1=(x,y) est sélectionné par le graphe G, un point P2=(y, x) est sélectionné par le graphe G^{-1} . La position de P2 se déduit de P1 en permutant les abscisses et ordonnées. La droite y = x (ou première bissectrice) est alors un axe de symétrie :

$$\forall P_1 \in G, \exists P_2 \in G^{-1}, P_2 = SymétriqueParRapportALaPremiereBissectrice(P_1)$$

(*Pour tout point P_1 dans la fonction G, le point symétrique P_2 par rapport à la première bissectrice est dans la fonction réciproque G^{-1}*)

Comparaison des fonctions Une fonction G_1 est (strictement) supérieure à G_2 sur un intervalle I si pour toute abscisse x de l'intervalle, l'ordonnée du point de G_1 est (strictement) supérieure à l'ordonnée du point de G_2.

Dérivées

Dérivabilité en x0 $\in I$

Dérivabilité en un point $x0 \in I$ non trivial La dérivabilité caractérise le comportement d'une fonction pour les abscisses dans l'infini entourant une abscisse x0. Prenons x_0 dans un intervalle non trivial sur lequel la fonction est définie, i.e. $x_0 \in I \subset Df$. Une fonction f est dérivable en x0 si il existe un coefficient directeur l tel que Soit $\epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \backslash \{x0\}, ((1)|x - x_0| < \alpha) \Rightarrow |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - l| < \epsilon$. Si l existe, l est notée $f'(x_0)$ et correspond à la dérivée de f en x_0.

La dérivabilité à droite est le cas où seulement : (1) $0 < x - x_0 < \alpha$, la dérivabilité à gauche le cas où seulement : (1) $-\alpha < x - x_0 < 0$ (plutôt que (1) $|x - x_0| < \alpha$)

La dérivabilité affirme que le taux d'accroissement $. \rightarrow \frac{f(.)-f(x_0)}{.-x_0}$ atteint une limite finie en x0.

Il est possible également de considérer la propriété directement comme un encadrement de la fonction : Soit $\epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \backslash \{x0\}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x0) + (f'(x0) - \epsilon)(x - x0) < f(x) < f(x0) + (f'(x0) + \epsilon)(x - x0))$

La propriété peut alors être interprétée comme le fait que G est encadrée par des droites au coefficient directeur arbitrairement proche d'un coefficient directeur l sur un voisinage de x0. (coefficient noté f'(x0) si il existe.

Illustration

Nous n'illustrons que le cas où la dérivabilité est à gauche et à droite. Le dégradé suggère que la zone bleu s'étend indéfiniment.

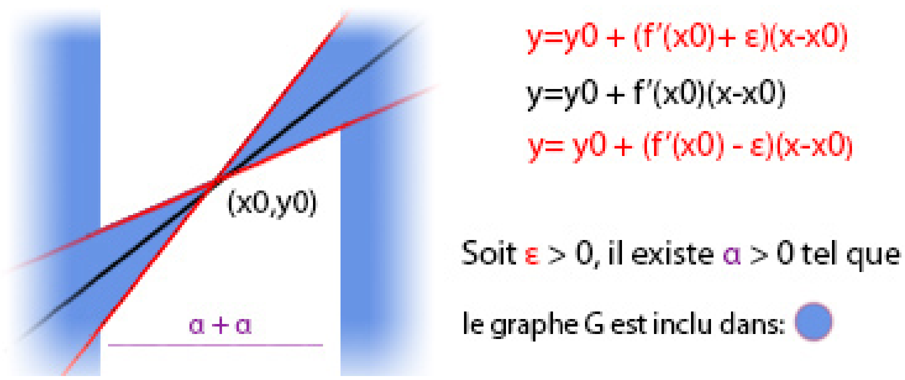

FIGURE 2.5 – Une fonction est dérivable en x0 si son graphe est encadré par des droites au coefficient directeur arbitrairement proche d'un coefficient directeur l autour de x0. Si un tel coefficient directeur l existe, il est noté f'(x0). Le cas illustré est le cas où il y a dérivabilité à gauche et à droite.

Si la dérivée existe, elle est associée à une droite tangente de coefficient directeur f'(x0) (la droite illustrée par un trait noir dans la figure ci-dessus). Le filtre bleu est un filtre d'inclusion qui impose que la fonction G appartienne au filtre (ou encore, que la fonction G soit exclue de la partie blanche). La notion de dérivabilité est basée sur la famille de filtres indexée par ϵ illustrée. La notion de dérivabilité en x0 caractérise le comportement de la fonction dans l'infini autour de l'abscisse x0. Dès lors, la dérivabilité n'affirme rien en x0 et rien non plus en une abscisse autour de x0. En effet, α est arbitrairement petit pour tout ϵ et donc n'importe quelle abscisse x1 distincte de x0 est dans la partie libre du graphe à l'extérieur de]x0-α, x0 + α [\{ x0 }[4] - qui est la seule tranche d'abscisses impliquée dans la propriété. Dans le cas de la dérivabilité, il est imposé que la fonction G soit définie en x0 et que les fonctions qui encadrent G autour de x0 passent par (x0,f(x0)), donc le filtre d'exclusion s'étend naturellement en x0 comme il a été fait.

Remarque sur les illustrations Les illustrations sont loin d'illustrer universellement la notion de dérivabilité qui est conçue sur des espaces beaucoup plus généraux, mais elles résument bien la propriété comme la possibilité d'approximation affine dans l'infini entourant le point.

Note : une fonction dérivable est-elle nécessairement continue ? Puisque le filtre d'inclusion rectangulaire de la continuité est plus grossier que le filtre d'inclusion de la dérivabilité, alors une fonction dérivable est continue.

4. *(l'intervalle délimité par x0-α et x0+α ; privé de x0)*

Dérivabilité sur I

Dérivabilité sur I Dérivabilité en chaque point (x,f(x)) pour x dans I. Puisque la dérivée est la même à droite et à gauche, la fonction G n'admet pas de "point anguleux" (point en lequel la fonction admet une tangente différente à droite et à gauche [5]).

5. Exemple de point anguleux : $x \to |x|$ en 0

2.6 Représentations non usuelles des fonctions

2.6.1 Introduction

Introduction des fonctions de représentation Nous avons représenté des sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ en sélectionnant des points dans un repère s'appuyant sur $\mathbb{D}$ ou encore ($\mathbb{R}$,$\bigoplus$,$\otimes$, $\oslash$, $|.|$). Par suite, nous avons identifié des configurations de points correspondant à des propriétés de fonctions. Nous avons pu noter que certaines propriétés (associées à des limites) s'appliquaient à des points dont les abscisses sont "dans l'infini autour d'autres abscisses", car s'appuyaient sur des familles arbitrairement fines d'ouverts. Des propriétés similaires s'appliquent sur des familles arbitrairement fines d'ouverts autour de $-\infty$ ou $+\infty$ (où ∞ signifie l'infini). Mais tandis que le langage de la navigation dans l'espace présente les premières familles comme "arbitrairement fines", celles autour de $-\infty$ ou $+\infty$ sont présentées comme "arbitrairement toujours plus fines mais infiniment larges". Puisque toute limite est soit une limite en 0, soit une limite en $+\infty$ (pour quiconque a fait des mathématiques), et puisque la topologie des ouverts sur lesquels la propriété s'appuie est similaire dans les deux cas, alors une inhomogénéité sur la représentation des ouverts (surtout une inhomogénéité... immense !) est une inefficacité conceptuelle. Pour de nombreux cas de situations mathématiques, l'infiniment grand ($-\infty$, $+\infty$) et ses voisinages devraient être compris et traités de la même façon que les voisinages à droite ou à gauche d'autres points. Pour obtenir une homogénéité représentative des ouverts, nous allons modifier l'endroit où nous plaçons les points. Dès lors, donnons nous u_1 et u_2 deux fonctions à valeurs réelles telles que $Du_1 = Du_2 = \mathbb{R}^2$ [6], qui sont telles que tout point de $\mathbb{R}^2$ a désormais une abscisse donnée par u_1 et une ordonnée donnée par u_2. Pour désigner une telle représentation, nous pouvons écrire : (u_1, u_2).

Cas d'un "changement d'axes" Un cas particulier de représentation est celui où u_1 ne dépend que de la première composante et u_2 de la deuxième composante. Dans ce cas, la représentation se décrit bien comme un "changement d'axes" général puisque seules les "graduations sur les axes" Ox Oy sont modifiées par rapport à la représentation usuelle. En particulier la représentation des fonctions en général est identique (en effet, une fonction consiste en un filtre d'exclusion vertical se distribuant sur les abscisses dans le langage usuel - et cela est conservé dans le cas d'un changement d'axes)

Cas d'un "changement d'échelle" Un changement d'échelle se produit lorsque u_1 et u_2 sont de plus très régulières et ne font que transformer les abscisses et les ordonnées le long des deux axes comme si les axes étaient dilatés ou compressés par endroit. Pour simplifier, nous pouvons considérer qu'une représentation est un changement d'échelle par rapport à la représentation usuelle si u_1 et u_2 sont des $C^{+\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ difféomorphismes [7] (strictement) croissants. De telles hypothèses permettent de conserver beaucoup d'éléments du langage usuel des fonctions, en particulier la topologie (ouverts, fermés, limite, continuité), la dérivabilité [8] et la relation d'ordre.

Cas d'un "changement d'échelle" impair et simple Pour conserver encore quelques éléments du langage usuel des fonctions, nous pouvons choisir des fonctions de représentation u_1 et u_2 impaires (cela conserve l'aspect de la parité et imparité). De plus, si u_1= u_2, la représentation sera dit simple et ne sera plus caractérisée que par une fonction de représentation u=u_1= u_2.

Plan achevé Représenter le plan achevé signifie représenter $\overline{\mathbb{R}}^2 = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$. Représenter le plan achevé $\overline{\mathbb{R}}^2$ à l'aide d'axes s'appuyant sur ($\mathbb{R}$,$\bigoplus$,$\otimes$, $\oslash$, $|.|$) a un effet sur l'interprétation subjective des nombres réels . En effet, dans le cadre d'un changement d'échelle, la représentation des ouverts devient uniforme, c'est-à-dire que les ouverts autour de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) se donnent de manière équivalentes aux ouverts à droite (resp. à gauche) de tout nombre réel (par exemple 0). Pour qu'un changement d'échelle représente le plan achevé, il suffit que u_1 et u_2 soient bornées (i.e. leur image est encadrée par deux nombres réels). Note : à propos des fermés autour d'un nombre réel ou de $+\infty$, il y a une inhomogénéité dans le sens où [a,$+\infty$[est fermé tandis que [a,b[ne l'est pas, mais de tels fermés interviennent dans peu de propriétés - et il y a d'autres exceptions naturelles qui s'appliquent du fait que $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas inclus dans $\mathbb{R}$.

6. (i.e. u_1 et u_2 sont définies sur les couples de nombres réels)
7. Un difféomorphisme est une bijection différentiable dont la réciproque est différentiable. Par suite, un $C^{+\infty}$ difféomorphisme est une bijection infiniment différentiable dont la réciproque est infiniment différentiable.
8. La dérivabilité est toujours représentée de la même façon mais avec une pente de tangente qui ne correspond plus à la valeur de la dérivée toutefois.

2.6.2 Représentation du plan achevé

Caractérisation de (arctan,arctan) Arctan est un ($C^{+\infty}$) difféomorphisme, croissant donc (arctan, arctan) est changement d'échelle. Arctan est impaire donc l'aspect des parités/imparités est conservé. L'image de arctan est bornée :$arctan(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc le plan achevé est représentable par prolongement par continuité. En effet, il suffit de poser $arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ et $arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$. De plus, $u_1 = u_2$ donc (arctan,arctan) est simple.
Note : le prolongement par continuité en $+\infty$ est possible car la distance dont est munie le plan devient $d((x,y),(x',y')) = \lambda \times \sqrt{(u_1(x) - u_1(x'))^2 + (u_2(y) - u_2(y'))^2}$, avec λ un nombre réel strictement positif. Dès lors, les infiniment grands sont infiniment proches et ce qui diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$ converge en $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$ dans le repère usuel.

Présentation qualitative Qualitativement, la représentation (arctan, arctan) change les différences perçues sur chaque axe : autour d'une abscisse x par un facteur $(1 + x^2)$ (autrement dit une différence d'abscisse autour de x sera perçu comme $(1 + x^2)$ fois plus petite que cette même différence autour de x = 0) et de même pour les ordonnées.

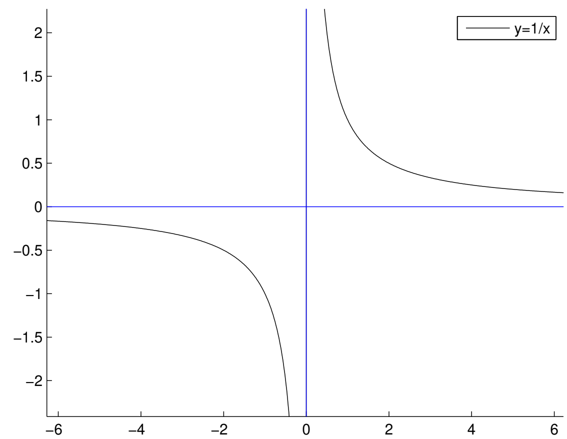

FIGURE 2.6 – La fonction . → 1/. représentée par (id,id)

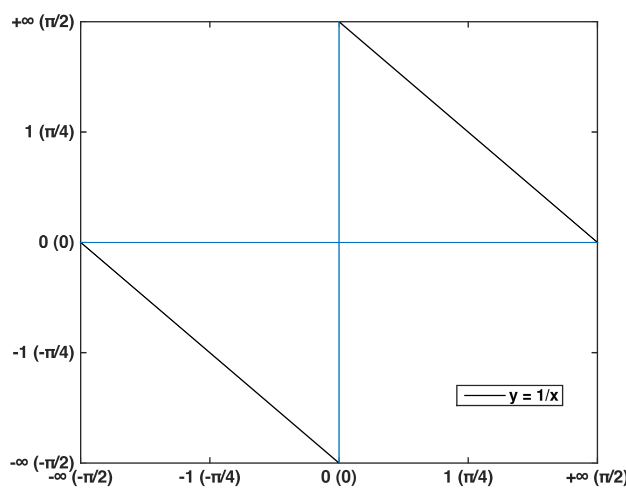

FIGURE 2.7 – La fonction . → 1/. représentée par (arctan, arctan) (en parenthèses les abscisses/ordonnées de la représentation usuelle)
[9]

9. Le graphe dans (arctan,arctan) s'écrit dans (id,id) :$(u, \frac{\pi}{2} - u)$ pour u positif, $(u, -u - \frac{\pi}{2})$ pour u négatif (cf. Arctan(x) + Arctan($\frac{1}{x}$) = signe(x)$\frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$).

En lisant simplement le tracé, nous apprenons que f : . $\to$ 1/. est affine sur $]-\infty, 0[et]0, +\infty[$, i.e. $\exists a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}$ tels que $u_2(f(x)) = a \times u_1(x) + b$ (graphiquement, on peut déterminer a = -1, b = -/+$\frac{\pi}{2}$ (respectivement)). f est donc $C^{+\infty}$. f est strictement décroissante. f converge vers $(-\infty, 0), (0^-, -\infty), (0^+, +\infty), (+\infty, 0)$. f est impaire. f ne s'annule pas.

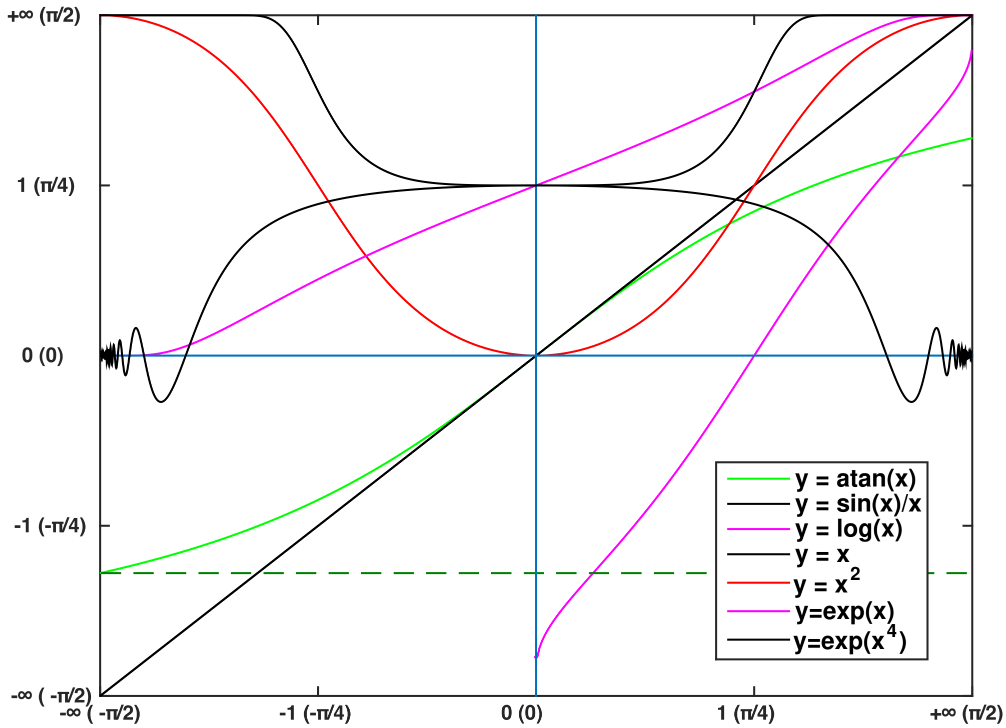

FIGURE 2.8 – Fonctions usuelles représentées par (arctan,arctan) (en parenthèses les abscisses/ordonnées de la représentation usuelle)

Dans (arctan,arctan), les fonctions réciproques (par exemple exp et ln) sont bien interprétées comme telles. Les parités/imparités, continuités, dérivabilités, les comparaisons des fonctions entre elles et comportements asymptotiques sont manifestes. Remarquons que, même si elles sont déformées, la périodicité et la concavité sont plutôt reconnues. En particulier, autour de (0,0) la représentation est approximable à (id,id) par développement limité donc il est possible d'obtenir l'aspect caractéristique de la concavité (dans l'infini entourant (0,0), mais plus autour également du fait de la régularité et faible variation d'arctan et des fonctions usuelles autour de (0,0)).

Remarque sur les conséquences de la représentation du plan achevé Le fait d'avoir un unique genre de représentant d'un ouvert n'est pas une efficacité conceptuelle que pour les propriétés locales (de type limite). En effet, l'infiniment grand disparaît. Il emporte avec lui la notion de fenêtre du plan à laquelle est restreinte une représentation visuelle. Il n'existe plus de graphe infini caché dans l'infiniment grand non représentable. Mais cela signifie-t-il que l'intuition de l'infiniment grand mérite d'être oubliée ? En fait, l'infiniment grand exhibe bien l'infinité des situations pouvant s'y produire, aussi son équivalence à l'infiniment petit entourant un point "à changement d'échelle" près éclaire sans doute la relation de tous les points avec leur autour.

Remarque sur l'incertitude L'incertitude de l'information sur nos figures est à $\Delta y = +\infty$. Par exemple, dans (arctan, arctan), une fonction qui tend vers y = 10000 est indiscernable d'une fonction divergeant vers $+\infty$. Mais, toute représentation graphique admet de telles incertitudes et est fondée sur des conventions d'interprétation (dont le principe de base est l'absence de surprise/la perfection de l'information représentée/la prévalence de l'hypothèse de régularité la plus extrême).

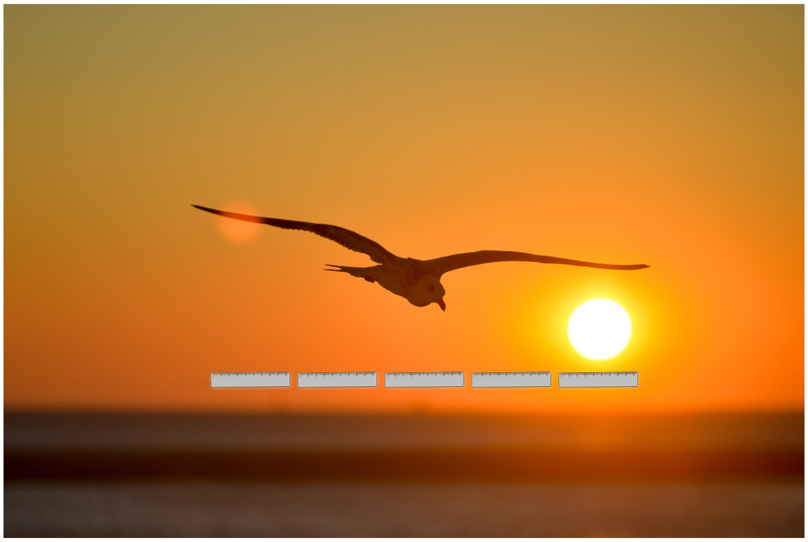

FIGURE 2.9 – Raisonner selon la distance usuelle dans une représentation qui la transforme est naturel. Ici, le soleil est immédiatement conçu plus grand que l'oiseau. De même, raisonner sur des fonctions usuelles selon la distance usuelle à partir d'un plan qui transforme les distances semble digérable - en particulier lorsque la majorité des propriétés des fonctions ont le même aspect.

Fonction usuelle-équivalente Soit une fonction f représentée par un changement d'échelle (u_1, u_2). La fonction qui se représente de manière identique (i.e. les points sélectionnés sont les mêmes) dans (id,id) est :

$$u_2 \circ f \circ u_1^{-1}$$

définie sur $u_1(Df) = \{u_1(x), x \in Df\}$

Courbe paramétrée usuelle-équivalente Le graphe G de la fonction f dans (u_1, u_2) s'identifie à la courbe paramétrée tracée dans (id,id) : $x \to (u_1(x), u_2(f(x))$ définie sur Df

Distance adaptée à la représentation La distance adaptée à la représentation est $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d((x, y), (x', y')) = \lambda \times \sqrt{(u_1(x) - u_1(x'))^2 + (u_2(y) - u_2(y'))^2}$, avec λ un nombre réel strictement positif.

Element de longueur de la distance adaptée La distance adaptée à la représentation est caractérisée par l'élément de longueur $dl^2 = \lambda^2 \times (u_1'(x)^2 dx^2 + u_2'(y)^2 dy^2)$

Dérivabilité La dérivabilité dans (u_1, u_2) se traduit en une dérivabilité dans (id,id) de pente observée en x égale à :

$$(u_2 \circ f \circ u_1^{-1})'(x) = u_1^{-1\prime}(x) \times f'(u_1^{-1}(x)) \times u_2'(f(u_1^{-1}(x)))$$

Remarque 3 : La pente observée est également égale à

$$lim_{h \to 0} \frac{u_2(f(x + h)) - u_2(f(x))}{u_1(x + h) - u_1(x)}$$

(s'adapte à la dérivabilité à gauche et à droite avec h<0 et h>0 (respectivement))

2.7 Conclusion

Les fonctions réelles d'une variable réelle disposent d'une image graphique naturelle dans le plan. Les graphes correspondent ontologiquement aux fonctions réelles d'une variable réelles. En effet, un graphe sélectionne par un nuage de points les couples de toute fonction à l'aide de deux droites des nombres réels $\mathbb{D}$ (l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées du plan). Epistémologiquement, le champs des propriétés des fonctions représentables dans le plan a été étudié en considérant les propriété émergentes : - d'après les propriétés usuelles des axes ; - d'après des structures algébriques des nombres ; - d'après des relations entre propriétés ou graphes dans le plan. Le champs des propriétés retrouvées dans l'espace des graphes est relativement large mais souvent restreint à des intervalles et à de grandes régularités. Quelle relation générale peut être faite entre une fonction réelle et un nombre réel ? Une fonction détermine une règle de transformation des nombres. Pour tout nombre dans le domaine de définition d'une fonction f, la fonction f peut être comprise comme un attribut intrinsèque du nombre. Autrement dit, les nombres peuvent être munis d'une infinité d'attributs intrinsèques représentés chacun par une fonction. Lorsqu'une fonction conserve des structures, l'organisation de son image dévoile l'organisation de son domaine. La représentation contrôlée du plan achevé révèle la similarité de l'infiniment petit autour de chaque nombre et de l'infiniment grand autour de $+\infty$ et $-\infty$.

Partie A

Annexes

A.1 Annexe - Définition des nombres réels décomposés

Définition des nombres réels (décomposés) Soit $\mathbb{S} = \{+, -, +-\}$
Soit opposé $\in \mathbb{S}^{\mathbb{S}}$:

$$oppose(\sigma) = \begin{cases} \text{-} & \text{si} & \sigma = + \\ + & \text{si} & \sigma = - \\ \text{+-} & \text{sinon} & (\sigma = +-) \end{cases} \tag{A.1}$$

Soit $\times \in \mathbb{S}^{\mathbb{S} \times \mathbb{S}}$:

$$\sigma \times \sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si} & \sigma' = + \\ oppose(\sigma) & \text{si} & \sigma' = - \\ \text{+-} & \text{sinon} & (\sigma' = +-) \end{cases} \tag{A.2}$$

Soit $\Theta = \{\theta_1\}$
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $\times$ et d'une loi de (co-)composition interne $+$.
Soit $\mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S}$ où $\times$ est le produit cartésien
Soient extension $\in \mathbb{E}^{\mathbb{T}}$, direction $\in \Theta^{\mathbb{T}}$, signe $\in \mathbb{S}^{T}$ telles que $\forall t \in \mathbb{T}$, $t = (extension(t), direction(t), signe(t))$
Soit $\mathbb{R}$ le plus grand sous ensemble de $\mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S}$ tel que :
$\exists 0 \in \mathbb{E}, \forall e \in \mathbb{E}, e + 0 = 0 + e = e$
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' = 0 \Rightarrow e = e' = 0$ *(a.k.a. "réci-absorbance")*
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2,\ e + e' = e' + e.$
$\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3,\ e + (e' + e'') = (e + e') + e''.$
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e \times e' = e' \times e$
$\exists 1 \in \mathbb{E}, 1 \neq 0, \forall e \in \mathbb{E}, e \times 1 = e$
$\forall e \in \mathbb{E} \backslash \{0\}, \exists e' \in \mathbb{E}, e \times e' = 1$
$\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3,\ e \times (e' \times e'') = (e \times e') \times e''.$
$\forall e, e', e'' \in \mathbb{E}^3,\ e \times (e' + e'') = (e \times e') + (e \times e'').$
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists! e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)$ *(a.k.a. "certaine condition d'unicité")*
$\forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e' \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = ne'$

$\forall (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$
$(\ \forall \epsilon \in \mathbb{E} \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall p > 0, \forall n > No, (max(e_n, e_{n+p}) - min(e_n, e_{n+p}) \leq \epsilon))$
$\Rightarrow$
$(\ \exists l \in \mathbb{E},\ \forall \epsilon \in \mathbb{E} \backslash \{0\}, \exists No \in \mathbb{N}, \forall n > No, (max(e_n, l) - min(e_n, l) \leq \epsilon))$

$\forall x \in \mathbb{R}$ extension(x) = 0 $\Leftrightarrow$ signe(x) = +-

où :
$\forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = e'.$
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e - e'$ est défini et égal à e" $\Leftrightarrow e' + e'' = e.$ où $e'' \in \mathbb{E}$
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2$, max(e,e') = e et min(e,e') = e' $\Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e' + e'' = e$

Théorème ($\mathbb{R}$,$\oplus$,$\otimes$,$\circledleq$,|.|) est un corps totalement ordonné archimédien et complet, où :
Soient $x = (e, \theta_1, \sigma), x' = (e', \theta_1, \sigma') \in \mathbb{R}^2$

$$x \oplus x' = \begin{cases} (\text{e + e'},\theta_1, \sigma) & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma',\ \sigma \neq +- \\ (\text{e - e'},\theta_1, \sigma) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e' \leq e, e \nleq e' \\ (\text{e' - e},\theta_1, \sigma') & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \nleq e \\ (\text{e + e'},\theta_1, \sigma') & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma',\ \sigma = +- \\ (\text{e - e'},\theta_1, +-) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e \leq e', e' \leq e \end{cases} \tag{A.3}$$

$$x \otimes x' = (e \times e', \theta_1, \sigma \times \sigma') \tag{A.4}$$

$$x \circledleq x' \Leftrightarrow signe(x' \ominus x) =_1 + \tag{A.5}$$

$$|x| = extension(x) \tag{A.6}$$

où :
$=_1$ est une relation définie sur les signes telle que seuls + et - sont distincts.
$\forall x \in \mathbb{R}$, -x = (extension(x),direction(x), opposé(signe(x)) et $\forall x \in \mathbb{R}$, "$\oplus$ (- x)" peut être réécrit "$\ominus$x"

A.2 Annexe - Preuves de la partie 1.3

Ci-dessous les liens entre les axiomes : - des nombres réels usuels ; - des nombres réels (décomposés).

Etude des axiomes relatifs à + et $\leq$

Dans le sens direct, les axiomes des nombres réels sont imposés aux nombres décomposés (Imf). Que savons nous de Imf ? Imf reproduit l'addition + et la comparaison $\leq$ des nombres réels avec $\oplus$ et $\circledleq$. De plus :

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow \quad Imf \subset \mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S} \\ & & x & \mapsto \quad f(x) = (|x|, \theta_1, signe(x)) \end{array}$$

Puisque x $\mapsto$ |x| n'est pas défini comme une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{E}$ (car c'est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$), l'application étudiée est en fait :

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow \quad Imf \subset \mathbb{T} = \mathbb{E} \times \Theta \times \mathbb{S} \\ & & x & \mapsto \quad f(x) = (extension(x), \theta_1, signe(x)) \end{array}$$

où le lien entre x et extension(x) devra être établi en plongeant $\mathbb{R}$ et Imf dans des structures algébriques similaires et en liant les éléments se correspondant. La fonction x $\mapsto$ signe(x) est quant à elle définie trivialement.

Sens direct Les hypothèses du sens direct sont : - f est un isomorphisme [1] qui conserve le signe ; - $\oplus$ et $\circledleq$ sont définies avec $+_{\mathbb{E}}$,$-_{\mathbb{E}}$ et $\leq_{\mathbb{E}}$ (relatives à $\mathbb{E}$) comme suit ;
Soient $\vec{d_1} = (e, \theta, \sigma)$, $\vec{d_1}' = (e', \theta, \sigma') \in Imf^2$:

$$\vec{d_1} \oplus \vec{d_1}' = \begin{cases} (\text{e + e'},\theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma',\ (\sigma \neq +-) \\ (\text{e - e'},\theta, \sigma) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e' < e \\ (\text{e' - e},\theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e < e' \\ (\text{e + e'},\theta, \sigma') & \text{si} \quad \sigma =_1 \sigma',\ (\sigma = +-) \\ (\text{e - e'},\theta, +-) & \text{si} \quad \sigma \neq_1 \sigma', e = e' \end{cases}$$

$\vec{d_1} \circledleq \vec{d_1}' \Leftrightarrow (\sigma = -$ et $\sigma' = +)$ ou $(e \leq e'$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 +)$ ou $(e' \leq e$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 -)$
- les opérateurs logiques de $\mathbb{E}$ sont définies à partir de la loi de composition $+_{\mathbb{E}}$ comme suit
$\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e - e'$ est définie et égale à e" ssi $e' + e'' = e$, où e" $\in \mathbb{E}$; $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e \leq e' \Leftrightarrow \exists e'' \in \mathbb{E}, e + e'' = e'$.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Leftrightarrow f(x) \circledleq$ f(y) ; f(x + y)= f(x) $\oplus$ f(y) ; f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur Imf

- Enfin, $\mathbb{T}$ (donc $\mathbb{E}$) est défini aussi petit que possible sous ces conditions, c'est-à-dire que

$$\begin{array}{rcrcl} extension & : & Imf & \to & \mathbb{E} \\ & & \vec{d1} & \mapsto & extension(\vec{d1}) \end{array}$$

est surjective (hypothèse d'économie ou encore de suffisance de $\mathbb{R}$ pour déterminer $\mathbb{E}$).

Sens réciproque Dans le sens réciproque, nous vérifions que les conditions établies nous permettent de retrouver les axiomes des nombres réels sur Imf. Puisque, dans ce contexte, Imf est défini intrinsèquement à partir des nouvelles conditions (et non à partir des nombres réels $\mathbb{R}$), alors Imf définit $\mathbb{R}$ à travers l'isomorphisme réciproque f^{-1}. Note : quel est le lien entre les conditions que nous allons poser et Imf ? Nous allons supposer que Imf est le plus grand ensemble vérifiant les conditions imposées, et ainsi nous favorisons certaines conditions restrictives (puisqu'il s'agit de contenir un ensemble aussi grand que possible) plutôt que génératives (ce qui s'avèrera plus élégant dans notre cas principalement pour la définition du lien entre les extensions et signes). Note bis : Imf est le plus grand ensemble possible seulement une fois toutes les conditions posées, c'est-à-dire une fois l'ensemble des axiomes des nombres réels traités, car si des conditions sont omises, alors "le plus grand ensemble possible" n'a plus à correspondre aux nombres réels.

Groupe additif

Note : Les preuves des premières conditions sont les plus "verbeuses", car il n'y a rien de défini encore dans l'espace des composantes

$\bigoplus$ est munie d'un élément neutre $\exists f(0) = \vec{0} \in Imf, \forall \vec{d1} \in Imf, \vec{d1} \bigoplus \vec{0} = \vec{0} \bigoplus \vec{d1} = \vec{d1}$

La condition équivalente est : extension(f($0_\mathbb{R}$))=$0_\mathbb{E}$ où $\forall e \in \mathbb{E}, e + 0_\mathbb{E} = 0_\mathbb{E} + e = e$. Autrement dit : + admet un élément neutre noté 0 dans $\mathbb{E}$ et extension(f(0))=0. Finalement, $\vec{0}$ = f(0)=(0, θ_1, +-)
(Il existe une extension nulle qui peut être jointe à d'autres sans les modifier. Elle est dans un vecteur de signe +- et cette association représente le nombre 0. C'est donc l'image par f du nombre réel 0 : f(0). On peut la noter $\vec{0}$ dans Imf)

Preuve Supposons que $+ \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ soit munie d'un élément neutre 0.Nous avons du fait du morphisme, $\bigoplus$ est munie d'un élément neutre $\vec{0}$ et $f(0) = \vec{0}$. On a par définition de l'élément neutre $\forall \vec{d1} \in Imf,\ \vec{d1} \bigoplus f(0) = f(0) \bigoplus \vec{d1} = \vec{d1}$. Considérant, $\forall \vec{d1} \in Imf, f(0) \bigoplus \vec{d1} = \vec{d1}$, on a , d'après le 4ème cas de la disjonction de cas de $\bigoplus$ qui s'applique du fait du signe de f(0) (signe(f(0))= +-), $\forall \vec{d1}$, $(extension(f(0)) + extension(\vec{d1}), \theta_1, signe(\vec{d1})) = (extension(\vec{d1}), \theta_1, signe(\vec{d1}))$. Donc $\forall \vec{d1} \in Imf, extension(f(0)) + extension(\vec{d1}) = extension(\vec{d1})$ (égalité sur la première composante du triplet). Puisque $\mathbb{E}$ est défini aussi petit que possible, $\begin{array}{rcrcl} extension & : & Imf & \to & \mathbb{E} \\ & & \vec{d1} & \mapsto & extension(\vec{d1}) \end{array}$ est surjective. Donc on obtient $\forall e \in \mathbb{E}, extension(f(0)) + e = e$. Considérons $\forall \vec{d1}, \vec{d1} \bigoplus f(0) = \vec{d1}$. D'après le 1er cas de la disjonction de cas de $\bigoplus$ qui s'applique pour tout $\vec{d1}$ de signe non nul, i.e. pour tout $\vec{d1}$ non nul d'après l'hypothèse d'un isomorphisme qui conserve le signe (i.e. l'unicité d'un vecteur de signe +- est donnée trivialement par l'hypothèse de conservation du signe et du fait que f est une fonction), $\forall d1 \in Imf \backslash \{\vec{(0)}\}$, $(extension(\vec{d1}) + extension(f(0)), \theta_1, signe(\vec{d1})) = (extension(\vec{d1}), \theta_1, signe(\vec{d1}))$. Ce qui donne, $\forall d1 \in Imf \backslash \{\vec{(0)}\}$, $extension(\vec{d1}) + extension(f(0)) = extension(\vec{d1})$ puis $\forall e \in \mathbb{E} \backslash \{extension(f(0))\}, e + extension(f(0)) = e$. Nous avons finalement $\forall e \in \mathbb{E}, e + extension(f(0)) = extension(f(0)) + e = e$ donc extension(f(0)) est un élement neutre de $\mathbb{E}$.

Réciproquement, supposons extension(f(0))=0 où $\forall e \in \mathbb{E}, e + 0 = 0 + e = e$. Montrons que $+ \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ est munie d'un élément neutre. Puisque d'après les disjonction de cas de $\bigoplus$, $(0, \theta 1, +-)$ est un élément neutre de Imf, alors son image réciproque $f^{-1}(\vec{0} = (0, \theta 1, +-)$ est un élément neutre de $\mathbb{R}$. Si plus de détail doit être donné, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(0 + x) = f(0) \bigoplus f(x)$ d'après le morphisme pour $\bigoplus$ (où 0 non encore posé comme l'élément neutre de $\mathbb{R}$ est simplement l'image réciproque $f^{-1}(\vec{0} = (0, \theta 1, +-)))$. De plus, f(0) $\bigoplus$ f(x) = f(x) d'après la définition de $\bigoplus$ et du fait que extension(f(0)) est l'élément neutre de $\mathbb{E}$ (cf. 4ème disjonction de cas) . Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(0 + x) = f(x)$. f étant bijective donc injective, on en déduit $\forall x \in \mathbb{R}, 0 + x = x$, puis de manière analogue $\forall x \in \mathbb{R}, 0 + x = x$. (0 est un élément neutre de $\mathbb{R}$)

Tout élément admet un opposé $\forall \vec{d1} = (e, \theta_1, \sigma) \in Imf, \exists \vec{d1}' \in Imf, \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1}' \bigoplus \vec{d1} = \vec{0}$

Puisque par construction, le signe est conservé, on peut trouver que la condition équivalente est : $\forall \vec{d1} = (e, \theta_1, \sigma) \in Imf \subset D1$, $\exists \vec{d1}' = (e, \theta_1, \textit{opposé}(\sigma)) \in Imf \subset D1$ où opposé $\in \mathbb{S}^{\mathbb{S}}$ est une fonction de l'ensemble des signes vers l'ensemble des signes définie telle que :

$$\textit{opposé}(\sigma) = \begin{cases} \text{-} & \text{si} \quad \sigma = + \\ + & \text{si} \quad \sigma = - \\ \text{+-} & \text{sinon} \quad (\sigma = +-) \end{cases} \tag{A.7}$$

Preuve Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' = x' + x = 0$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, f(x + x') = f(x' + x) = f(0)$, puis $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, f(x) \bigoplus f(x') = f(x') \bigoplus f(x) = f(0)$ par morphisme. Puisque les signes sont conservés, on a signe(f(x)) = opposé(signe(f(x'))). Enfin, la bijectivité de f donne $\forall \vec{d1} \in Imf, \exists \vec{d1}' \in Imf, \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1}' \bigoplus \vec{d1} = \vec{0}$. (avec de plus $signe(\vec{d1}') = \textit{opposé}(signe(\vec{d1}))$). D'après les disjonctions de cas, puisqu'on doit avoir signe($\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$)= +-, on a de plus nécessairement extension($\vec{d1}$)=extension($\vec{d1}'$).

Réciproquement, on vérifie immédiatement $(e, \theta_1, \textit{opposé}(\sigma))$ est le symétrique de (e, θ_1, σ) pour $\bigoplus$. Par isomorphisme (qui remonte de Imf vers $\mathbb{R}$), tout élément admet un opposé pour + dans $\mathbb{R}$.

Remplacement de la condition équivalente établie ; définition intrinsèque du lien entre signe et extension L'unicité de l'extension associée à +- n'a pas été posée dans Imf. Nous l'avons utilisée dans le sens direct de la preuve de la section précédente (d'après la conservation du signe défini dans $\mathbb{R}$) mais nous devons l'intégrer dans nos conditions équivalentes pour définir intrinsèquement le signe dans Imf. Si nous ajoutions simplement la condition d'unicité de l'extension associée à +- aux conditions que nous venons de poser, nous aurions : $\forall \vec{d1} = (e, \theta_1, \sigma) \in Imf \subset \mathbb{T}$, $\exists \vec{d1}' = (e, \theta_1, \textit{opposé}(\sigma)) \in Imf \subset \mathbb{T}$ (condition qui vient d'être établie) ET $signe(\vec{d1}) = +- \Rightarrow extension(\vec{d1}) = 0$ (condition qui doit être posée) ; Plutôt que de retenir ces deux conditions, nous posons un lien plus élégant entre les signes et les extensions :

$$\forall \vec{d1} \in Imf, extension(\vec{d1}) = 0 \Leftrightarrow signe(\vec{d1}) = +-$$

(Seule l'extension nulle est associée au signe +-. Toute extension non nulle est dans deux vecteurs dont l'un est de signe + et l'autre de signe -) [2]

$\bigoplus$ est interne $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in Imf^2, (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \in Imf.$

Il faut et suffit que : $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' \in \mathbb{E}$ (+ est une loi de composition interne dans $\mathbb{E}$), $(\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists! e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)$) (i.e. $\leq_{\mathbb{E}}$ est totale ainsi qu'une certaine condition d'unicité) et $(\forall e, e', \exists e'', e = e' + e'' et \exists e''', e + e''' = e' \Rightarrow e = e'$) (i.e. antisymétrie de $\leq_{\mathbb{E}}$)
(Deux extensions peuvent se joindre. Deux extensions se joignant définissent une extension.)
(Pour tout couple d'extensions, il existe une unique extension qui jointe à la première est égale à la seconde ou jointe à la seconde est égale à la première).
(Un couple d'extensions dont la première est une partie de la seconde et la seconde une partie de la première est un couple d'extensions égales) (Note : cette condition va être remplacée par une condition plus commode dans la suite du document)). [3]

Preuve Supposons que + est interne dans $\mathbb{R}$. Alors par isomorphisme $\bigoplus$ est interne dans Imf. $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \in Imf, (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \in Imf$. Montrons d'abord, $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' \in \mathbb{E}$. Premièrement, si une des deux extensions e ou e' est nulle, alors c'est vrai. Sinon,prenons deux extensions non nulles quelconques dans $\mathbb{E}$. Puisque $\mathbb{E}$ est aussi petit que possible elles sont dans 2 vecteurs $\vec{d1}$, $\vec{d1}'$ [4] (de signes différents de +- car +- n'est associé qu'à l'extension nulle d'après l'hypothèse de conservation du signe). En prenant

2. La partie "Toute extension non nulle est dans deux vecteurs dont l'un est de signe + et l'autre de signe -" est valide à condition que cela ne contredise aucune nouvelle contrainte à venir (puisque Imf est le plus grand possible) - ce qui sera le cas
3. A ce stade de notre étude, il convient de remarquer que notre espace fait du simple caractère interne de la loi + relative aux nombres réel quelque chose qui implique des propriétés additives et d'ordres à la fois (relatives à $\mathbb{E}$ i.e. aux extensions).
4. i.e. il n'y a pas d'extension dans aucun vecteur, seules les extensions utiles à la représentation sont dans l'ensemble $\mathbb{E}$

l'opposé éventuellement, les deux extensions sont dans 2 vecteurs de même signe +. D'après le 1er cas de la disjonction de cas qui s'applique, nous avons $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' =$ (e + e',θ,+) $\in$ Imf, donc $e + e' \in \mathbb{E}$. Dès lors, $\forall e, e' \in \mathbb{E}, e + e' \in \mathbb{E}$. Montrons maintenant $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists! e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)$. Si e ou e' (respectivement) est nulle alors c'est vrai (prenons e" égale à e' ou e (respectivement)). Sinon, e et e' sont dans des vecteurs de signes non nuls. En prenant l'opposé éventuellement, nous pouvons les prendre de signes différents. Un cas et un seul parmi le 2ème, 3ème ou 5ème cas de la disjonction de cas doit s'appliquer (cf. signe distinct du résultat selon les 3 cas), dès lors soit e$\leq$ e' et $e' \nleq e$, soit e' $\leq$ e et e $\nleq$ e', soit e = e' ; i.e $\exists e'', (e + e'' = e') ou (e + e'' = e')$ (la comparaison $\leq$ existe) et antisymétrie de $\leq$ (nécessaire ici lorsque e et e' sont non nulles mais qui s'étend au cas où au moins l'une est nulle). De plus, e - e' ou e' - e étant bien défini (f est une fonction), ce e" doit être unique. Finalement, $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists! e'', (e'' + e = e') ou (e'' + e = e')$ et antisymétrie de $\leq$ ($\forall e, e', \exists e'', e = e' + e'' et \exists e''', e + e''' = e' \Rightarrow e = e'$)

Réciproquement, supposons $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' \in \mathbb{E}$, $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists! e'', (e'' + e = e') ou (e'' + e = e')$ et l'antisymétrie de $\leq$. Soient deux vecteurs $\vec{d1}\ \vec{d1}' \in Imf^2$. Si leurs signes sont les mêmes au sens large, le signe de $\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}$ est bien déterminé, de plus e + e' $\in \mathbb{E}$, dès lors $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' \in$ Imf. Si leurs signes sont différents au sens stricte (i.e. un signe est + et l'autre est -), un seul cas parmi les trois disjonctions de cas s'applique donc le signe est déterminé. De plus, e - e' ou e' - e $\in \mathbb{E}$ (lorsque la disjonction de cas correspondante s'applique, du fait du lien immédiat entre comparaison et soustraction d'extension). Dès lors, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d2} \in Imf$. Par isomorphisme (qui remonte de Imf vers $\mathbb{R}$), + est interne dans $\mathbb{R}$. (note : dans la suite du document, nous omettons par défaut le fait que la propriété se transmet à $\mathbb{R}$ par isomorphisme)

Remarque : nous faisons de $\leq_{\mathbb{E}}$ une relation totale (donc réflexive) et antisymétrique. Si nous imposons une condition de transitivité, $\leq_{\mathbb{E}}$ sera une relation d'ordre (totale).

$\bigoplus$ est commutative $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in Imf^2$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d2} = \vec{d2} \bigoplus \vec{d1}$.

Une condition équivalente est que $+_{\mathbb{E}}$ soit commutative, c'est-à-dire $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, e + e' = e' + e.$ [5] (remarquons en particulier que l'ordre des deux opérandes $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ de $\bigoplus$ n'a pas d'importance si leurs signes sont différents et donc seul le cas où les vecteurs ont un même signe, i.e. seule la première ou quatrième disjonction de cas, est à considérer).
(Joindre deux extensions e et e' se fait en ordre quelconque e + e'

Preuve Supposons que + (relative à $\mathbb{R}$) est commutative. Dès lors, $\bigoplus$ est commutative par isomorphisme. Soient e, e' $\in \mathbb{E}^2$. Si e ou e' est nulle, alors e + e' = e' + e (par définition de l'élément neutre). Sinon, soient e et e' non nulles. e et e' sont dans deux vecteurs qu'on peut choisir de mêmes signes $\vec{d1}$ et $\vec{d1}'$. $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1}' \bigoplus \vec{d1}$ donne directement e + e' = e' + e (cf. égalité sur la première composante des triplets). Finalement, $\forall e, e' \in \mathbb{E}$, e + e' = e' + e, i.e. + (relative à $\mathbb{E}$) est commutative.

Réciproquement, supposons que $+_{\mathbb{E}}$ (relative à $\mathbb{E}$) est commutative. Soient deux vecteurs $\vec{d1}, \vec{d1}' \in Imf^2$. Si un des deux est nul (par exemple sans perdre de généralité $\vec{d1}$), alors $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1}' = \vec{d1}' \bigoplus \vec{d1}$ (par définition de l'élément neutre). Sinon, ils ont deux extensions et signes non nuls. Si les deux signes sont égaux, alors le 1er cas de la disjonction de cas s'applique. $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$ car e + e' = e' + e et les signes sont égaux. Si les deux signes sont strictement différents, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$ car dans les deux cas le vecteur résultant est celui dont l'extension est la plus grande extension des deux vecteurs moins la plus petite et le signe est déterminé de manière identique dans les deux cas. Par suite, $\forall \vec{d1}, \vec{d1}' \in Imf^2, \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}' = \vec{d1} \bigoplus \vec{d1}'$.

$\bigoplus$ associative $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3$, $\vec{d1} \bigoplus (\vec{d2} \bigoplus \vec{d3}) = (\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \bigoplus \vec{d3}$.

La condition équivalente est l'associativité de $+_{\mathbb{E}}$
(Joindre e et e"-jointe-à-e"' donne une extension égale à e-jointe-à-e" et e"' : e + e" + e"'.)

Remarque : le fait d'associer une somme de 3 extensions à une longueur scindée en 3 points suffit à représenter l'associativité de $+_{\mathbb{E}}$ puisque l'ordre des jointures d'extensions se redéfinit intuitivement librement. Lorsque l'associativité est considérée avec des vecteurs de signes quelconques, des vecteurs ordonnés (i.e. il existe

5. Joindre une extension e' et e ou e et e' donne une même extension e + e'.

un premier, un second, un troisième,...) scindent un résultat en se superposant éventuellement. Le résultat doit alors être indépendant des réoganisations se produisant si deux vecteurs successifs sont évalués sommés ensemble.

Preuve Le fait que l'associativité de + (relative à $\mathbb{R}$) implique l'associativité de + (relative à $\mathbb{E}$) est trivial. En effet, en prenant trois extensions quelconques, traiter trivialement le cas où au moins une est nulle. Sinon, prendre les extensions non nulles dans des vecteurs de mêmes signes, et conclure à partir de l'égalité sur la première composante . Montrons réciproquement que l'ajout de la condition d'associativité de + (relative à $\mathbb{E}$) est suffisante (pour avoir $\bigoplus$ associative (et donc + (relative à $\mathbb{R}$) associative)). Soient $\vec{d1} = (e_1, \theta_1, \sigma_1), \vec{d2} = (e_2, \theta_1, \sigma_2), \vec{d3} = (e_3, \theta_1, \sigma_3) \in Imf^3$. Si un des vecteurs est nul, alors la propriété est triviale. Sinon, les vecteurs sont tous non nuls. Soit ils ont tous le même signe, soit pas. Supposons que tous les vecteurs ont le même signe. Dans ce cas, soit ce signe commun est +, soit c'est -. Prenons le égal à +. Dans ce cas, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3})= (e_1 + (e_2 + e_3), \theta_1, +)$ et $(\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}) = ((e_1 + e_2) + e_3), \theta_1, +)$. Puisque que + (relative à $\mathbb{E}$) est associative, alors $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. De même si le signe commun est -. Considérons maintenant le cas où les signes sont différents (et toujours tous non nuls). Par commutativité de $\bigoplus$, nous pouvons traiter le seul cas où $signe(\vec{d1}) = signe(\vec{d2}) \neq signe(\vec{d3})$. En effet, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d2}\bigoplus\vec{d3})\bigoplus\vec{d1} = (\vec{d3}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d1}$ et $(\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3} = \vec{d3}\bigoplus(\vec{d1}\bigoplus\vec{d2}) = \vec{d3}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d1})$. Donc, le rôle de $\vec{d1}$ et $\vec{d3}$ peut être permuté si besoin et le vecteur de signe égal à celui de $signe(\vec{d2})$ peut être placé en première position. Supposons σ_1 = -,σ_2 = -, σ_3 = +. Soit $e_1 + e_2 = e_3$, soit $e_1 + e_2 < e_3$, soit $e_1 + e_2 > e_3$ ($\leq_{\mathbb{E}}$ est antisymétrique). Supposons $e_1 + e_2 = e_3$. Dans ce cas, $(\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3} = (e_1 + e_2, \theta_1, -)\bigoplus(e_3, \theta_1, +) = (0, \theta_1, +-)$ et $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (e_1, \theta_1, -)\bigoplus(e3 - e2, \theta_1, +) = (0, \theta_1, +-)$, d'où $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. Supposons $e_1 + e_2 < e_3$. Dans ce cas, $(\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3} = (e_1 + e_2, \theta_1, -)\bigoplus(e_3, \theta_1, +) = (e3 - (e_1 + e_2), \theta_1, +)$, de plus $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (e_1, \theta_1, -)\bigoplus(e3 - e2, \theta_1, +)$. car par hypothèse, $\exists e' \neq 0, (e1 + e2) + e' = e3$ donc en utilisant l'associativité et commutativité de $+_{\mathbb{E}}$, $(e_1 + e_2) + e' = (e_2 + e_1) + e' = e_2 + (e_1 + e') = e_3$ donc $e_3 > e_2$. De plus, $e_1 + e' = e_3 - e_2$ donc $e_1 < e_3 - e_2$. Dès lors, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = ((e_3 - e_2) - e_1, \theta_1, +)$. On a aussi : $(e_1 + e_2) + ((e3 - e_2) - e_1) = ((e3 - e_2) - e_1) + (e_1 + e_2) = (((e3 - e_2) - e_1) + e_1) + e_2 = (e3 - e_2) + e_2 = e_3$ en utilisant la commutativité et l'associativité, donc $(e3 - e_2) - e_1 = (e3 - (e_2 + e_1)$. D'où, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. Supposons maintenant, $e_1 + e_2 > e_3$. Dans ce cas, $[[(\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3} = (e_1 + e_2, \theta_1, -)\bigoplus(e_3, \theta_1, +) = ((e_1 + e_2) - e3, \theta_1, -)]]$ (nous mettons le résultat entre crochet car le résultat est utilisé à 3 reprises par la suite, i.e. nous ramenons $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3})$ à cette expression à 3 reprises). Soit $e_2 < e_3$, $e_2 > e_3$, soit $e_2 = e_3$. Si, $e_2 = e_3$, alors $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = \vec{d1}\bigoplus\vec{0} = (e_1, \theta_1, -) = ((e_1 + e_2) - e_2, \theta_1, -)$ (en utilisant la commutativité), donc $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. Supposons, $e_2 > e_3$, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (e_1, \theta_1, -)\bigoplus(e_2 - e_3, \theta_1, -) = (e_1 + (e_2 - e_3), \theta_1, -)$. Or, $e_3 + (e_1 + (e_2 - e_3)) = (e_1 + (e_2 - e_3)) + e_3 = e_1 + ((e_2 - e_3) + e_3) = e_1 + (e_3 + (e_2 - e_3)) = e_1 + e_2$ en utilisant la commutativité puis associativité, puis la définition de $(e_2 - e_3)$. Dès lors, $e_3 + (e_1 + (e_2 - e_3)) = (e_1 + e_2) - e3$ puis $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. Enfin, si $e_3 > e_2$, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (e_1, \theta_1, -)\bigoplus(e_3 - e_2, \theta_1, +)$. $e_1 + e_2 > e_3$ implique $e_1 > e_3 - e_2$ avec l'associativité et la commutativité. Donc, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (e_1 - (e_3 - e_2), \theta_1, -)$. Il reste à montrer $(e_1 + e_2) - e_3 = e_1 - (e_3 - e_2)$ pour obtenir le résultat. Ajoutons $((e_3 - e_2) + e_3)$ à chacune des expressions et utilisons l'associativité et la commutativité de + : $((e_3 - e_2) + e_3) + ((e_1 + e_2) - e_3) = (e_3 - e_2) + (e_3 + ((e_1 + e_2) - e_3) = (e_3 - e_2) + (((e_1 + e_2) - e_3) + e_3) = (e_3 - e_2) + (e_1 + e_2) = (e_1 + e_2) + (e_3 - e_2) = e_1 + (e_2 + (e_3 - e_2)) = e_1 + ((e_3 - e_2) + e_2) = e_1 + e_3$. De même, $((e_3 - e_2) + e_3) + (e_1 - (e_3 - e_2)) = (e_1 - (e_3 - e_2)) + ((e_3 - e_2) + e_3) = ((e_1 - (e_3 - e_2)) + (e_3 - e_2)) + e_3) = e_1 + e_3$. Dès lors, $(e_1 + e_2) - e_3 = e_1 - (e_3 - e_2) = e_1 + e_3 - ((e_3 - e_2) + e_3)$. Donc, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$. Finalement, en procédant de la même manière dans le cas où σ_1 = +,σ_2 = +, σ_3 = -, $\vec{d1}\bigoplus(\vec{d2}\bigoplus\vec{d3}) = (\vec{d1}\bigoplus\vec{d2})\bigoplus\vec{d3}$ pour tout $\vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3}$ d'après le seul ajout de l'associativité.

Réécriture de l'antisymétrie de $\leq_{\mathbb{E}}$ comme la "réci-absorbance" de 0 Nous avons établi que l'antisymétrie de $\leq_{\mathbb{E}}$ était une des conditions nécessaires pour que $\bigoplus$ soit interne. L'antisymétrie de $\leq_{\mathbb{E}}$ s'écrivait ainsi : $(\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists e'' \in \mathbb{E}, e = e' + e'' et \exists e''' \in \mathbb{E}, e + e''' = e' \Rightarrow e = e')$. Depuis, nous avons obtenu de nouvelles conditions sur $+_{\mathbb{E}}$ (associativité et commutativité). Ce sont des outils que nous pouvons utiliser pour réécrire les anciennes conditions que nous avons établies. L'antisymétrie est équivalente à plusieurs conditions plus commodes : $(\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists e'', e = e' + e'' et \exists e''', e + e''' = e' \Rightarrow e = e')$ (i) $\Leftrightarrow$ $(\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, (e + e' = 0 \Rightarrow e = 0 \ ou \ e' = 0))$ (0 est réci-absorbant) (ii) $\Leftrightarrow$ 0 est le plus petit élément de $\mathbb{E}$ (iii)

(Un couple d'extensions dont la première est une partie de la seconde et la seconde une partie de la première est un couple d'extensions égales) .

$\Leftrightarrow$

(Si la somme de deux extensions est nulle, alors au moins l'une des deux est nulle).

$\Leftrightarrow$
(L'extension nulle est la plus petite extension).

Preuve (i) $\Rightarrow$ (ii)
Supposons que $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists e'', e = e' + e'' et \exists e''', e + e''' = e' \Rightarrow e = e'$ (i). Soient e et e' tels que e + e' = 0. Nous avons également e = 0 + e. Dès lors, d'après (i), e = 0 . Donc (ii) est prouvé.
(ii) $\Rightarrow$ (iii)
En utilisant un raisonnement par l'absurde, supposons que 0 n'est pas le plus petit élément de $\mathbb{E}$. Alors, il existe e un élément appartenant à $\mathbb{E}$ et différent de 0 et e' un autre élément appartenant à $\mathbb{E}$ tels que e + e' = 0. D'après (ii), e = 0 ou e' =0. Puisque e=0 est absurde par hypothèse, alors e' = 0. Supposons que e'=0, alors e + 0 = 0, puis e=0 (par définition de l'élément neutre 0). Or, e=0 est absurde.Par suite l'hypothèse que 0 n'est pas le plus petit de $\mathbb{E}$ est absurde et 0 est bien le plus petit élément de $\mathbb{E}$.
(iii) $\Rightarrow$ (i)
Soient e, e', e",e"' $\in \mathbb{E}^4$ tels que e = e' + e" (1) et e + e"' = e' (2). Supposons (iii) et montrons e= e'. En remplaçant e dans (2) d'après (1), nous avons (e' + e") + e"' = e'. En utilisant l'associativité, nous avons e ' + (e" + e"') = e'. De plus, nous avons à notre disposition la propriété suivante : $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists! e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e') ou (e' + e'' = e)$ (3) (propriété établie dans la section " $\bigoplus$ est interne"). Dès lors, en remarquant e' + 0 = e', nous avons e ' + (e" + e"') = e' et e' + 0 = e'. La propriété (3) nous permet d'identifier (e" + e"') et 0 car il existe une unique extension qui jointe à e' est égale à e'. Par suite, e" + e"' = 0. D'après (iii), cela donne e" = e"' = 0. L'expression (1) donne par suite e = e' + e" = e' + 0 = e'. D'où e = e'.
(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) donc toutes les conditions sont équivalentes.

(Corps) totalement ordonné

Beaucoup de conditions qui rendent vrais les axiomes de la relation d'ordre $\circledleq$ ont déjà été posées. Cela vient du fait que $\bigoplus$ est construite à partir des mêmes briques logiques que $\circledleq$ (c'est-à-dire l'addition des extensions $+_{\mathbb{E}}$ - utilisée éventuellement de manière à définir $\leq_{\mathbb{E}}$). Dans le cas où un axiome relatif à $\circledleq$ est déjà vrai grâce à nos conditions précédentes, nous pourrons toujours préciser comment les logiques des composantes s'intègrent dans la hierarchie totale : "composantes -> translations -> points -> droite". En particulier, l'interprétation de $\bigoplus$ a tendance à symétriser les nombres autour du 0. L'interprétation de $\circledleq$ quant à elle décentre grandement la représentation en réalisant une scission gauche/droite "le long de la droite des nombres réels". Pour rappel, la comparaison a été décrite à partir de logiques propres aux composantes de la façon suivante :
Soient $\vec{d_1} = (e, \theta, \sigma)$, $\vec{d_1}' = (e', \theta, \sigma') \in Imf^2$
$\vec{d_1} \circledleq \vec{d_1}' \Leftrightarrow (\sigma = -$ et $\sigma' = +)$ ou $(e \leq e'$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 +)$ ou $(e' \leq e$ et $\sigma =_1 \sigma' =_1 -)$

$\circledleq$ **est reflexive** $\forall \vec{d1} \in Imf, \vec{d1} \circledleq \vec{d1}$.
(un point d'arrivée est à droite de lui-même (à droite se définit au sens large))

Il faut et suffit d'admettre la reflexivité de $\leq_{\mathbb{E}}$, ou encore $\forall e \in \mathbb{E}, \exists e' \in \mathbb{E}, e +_{\mathbb{E}} e' = e$. Dès lors, une autre CNS (condition nécessaire et suffisante) est la condition vide (True) car les équivalences établies lorsque nous avons traité le cas "$\bigoplus$ admet un élément neutre" donnaient dejà des conditions plus fortes (cf. $\forall e \in \mathbb{E}$, e + 0 = e)
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve La réflexivité de $\leq_{\mathbb{E}}$ (relative à $\mathbb{E}$) est déjà nécessaire. Montrons que nos conditions précédentes sont déjà suffisantes pour établir la réciproque. Soit $\vec{d1} = (e, \theta_1, \sigma) \in Imf$. Puisque $signe(\vec{d1}) = signe(\vec{d1})$ et $e \leq_{\mathbb{E}} e$ (cf. réflexivité de $\leq_{\mathbb{E}}$ (relative à $\mathbb{E}$)) (cf. e + 0 =e), alors $\vec{d1} \circledleq \vec{d1}$ (d'après le 2ème ou 3ème cas de la "disjonction de cas"). D'où, $\circledleq$ est réflexive (puis $\leq_{\mathbb{R}}$ est réflexive par isomorphisme remontant de Imf vers $\mathbb{R}$ puisqu'il préserve la relation d'ordre par hypothèse).

$\circledleq$ **est antisymétrique** $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in Imf^2$, $\vec{d1} \circledleq \vec{d2}$ et $\vec{d2} \circledleq \vec{d1} \Rightarrow \vec{d1} = \vec{d2}$
(deux points vérifiant que le premier est à droite du second et que le second est à droite du premier sont identiques)

L'hypothèse de l'antisymétrie ne peut être vraie si les triplets ont des signes différents. Aussi, cf. cas restant dans la description de $\lessgtr$, il faut et suffit que : $\leq_{\mathbb{E}}$ soit antisymétrique ($\forall e, e' \in \mathbb{E}$, e $\leq_{\mathbb{E}}$ e' et e' $\leq_{\mathbb{E}}$ e $\Rightarrow e = e'$). Une autre CNS est donc la condition vide (True) car les équivalences établies lorsque nous avons traité le cas "$\bigoplus$ est interne" donnaient dejà des conditions plus fortes. (nous avons en particulier montré depuis que l'antisymétrie de $\leq_{\mathbb{E}}$ était équivalente à la réci-absorbance de 0 (relative à $+_{\mathbb{E}}$))
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve Montrons que nos conditions précédentes sont déjà suffisantes. Soient $\vec{d1} = (e1, \theta_1, \sigma_1), \vec{d2} = (e2, \theta_1, \sigma_2) \in Imf^2$. Supposons $\vec{d1} \lessgtr \vec{d2}$ et $\vec{d2} \lessgtr \vec{d1}$. On a signe($\vec{d1}$) $=_1$ signe($\vec{d2}$) car sinon une des deux inégalités ne serait pas vérifiée. Dès lors, soit le deuxième cas de la "disjonction de cas", soit le troisième cas de la "disjonction de cas" s'applique pour établir à la fois $\vec{d1} \lessgtr \vec{d2}$ et à la fois $\vec{d2} \lessgtr \vec{d1}$. Dans tous les cas, nous avons e1 $\leq_{\mathbb{E}}$ e2 et e2 $\leq_{\mathbb{E}}$ e1. Par antisymétrie de $\leq$ (relative à $\mathbb{E}$), nous avons e1 = e2. De plus, puisque les signes ne sont pas différents, cela implique $\vec{d1} = \vec{d2}$. Dès lors, $\lessgtr$ est antisymétrique

$\lessgtr$ est transitive $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3, \vec{d1} \lessgtr \vec{d2}$ et $\vec{d2} \lessgtr \vec{d3} \Rightarrow \vec{d1} \lessgtr \vec{d3}$
(un point plus à droite qu'un second - qui est lui-même plus à droite qu'un troisième - est à droite de ce troisième point.)

Il est nécessaire et suffisant que $\leq_{\mathbb{E}}$ soit transitive . En revenant à la définition de $\leq_{\mathbb{E}}$ comme l'abréviation utilisant $\exists$ et $+_{\mathbb{E}}$, il est suffisant que $+_{\mathbb{E}}$ soit associative et interne. Une autre condition équivalente est donc la condition vide (True) (les équivalences établies lorsque nous avons traité le cas "$\bigoplus$ est associative" donnaient déjà des conditions plus fortes).
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve Montrons que nos conditions précédentes sont déjà suffisantes. Soient $\vec{d1} = (e_1, \sigma_1, \theta_1), \vec{d2} = (e_2, \sigma_2, \theta_1), \vec{d3} = (e_3, \sigma_3, \theta_1) \in Imf^3$ tels que $\vec{d1} \lessgtr \vec{d2}$ et $\vec{d2} \lessgtr \vec{d3}$. Soit $signe(\vec{d1}) = -$ et $signe(\vec{d3}) = +$, soit $signe(\vec{d1}) =_1 signe(\vec{d3})$ (le cas $signe(\vec{d1}) = +$ et $signe(\vec{d3}) = -$ est interdit pour des raisons immédiates). Si $signe(\vec{d1}) = -$ et $signe(\vec{d3}) = +$, alors $\vec{d1} \lessgtr \vec{d3}$ d'après le 1er cas de la "disjonction de cas". Sinon, on trouve que nécessairement $signe(\vec{d2}) =_1 signe(\vec{d1})$ (car si ce n'est pas le cas, alors $signe(\vec{d1}) = -$ et $signe(\vec{d2})$=+ puis $signe(\vec{d3})$=+ donc le cas est traité) . Supposons que $signe(\vec{d2}) =_1 signe(\vec{d1}) =_1 +$. $\vec{d1} \lessgtr \vec{d2}$ nous donne $\exists e' \in \mathbb{E}, e_1 + e' = e_2$ (1). De même, $\vec{d2} \lessgtr \vec{d3}$, donne $\exists e'', e_2 + e'' = e_3$ (2). Finalement, en remplaçant (1) dans (2), nous avons $\exists e', e'' \in \mathbb{E}^2, (e_1 + e') + e'' = e_3$. Puisque + (relative à $\mathbb{E}$) est associative, nous avons $\exists e', e'' \in \mathbb{E}^2, e_1 + (e' + e'') = e_3$. Etant donné que $(e' + e'') \in \mathbb{E}$ (cf. + interne), nous avons $\exists e''', e_1 + e''' = e_3$ (e"' = e' + e"), i.e. $e_1 \leq e_3$. Nous avons ainsi $\vec{d1} \lessgtr \vec{d3}$. On montre la même conclusion de manière analogue si on suppose $signe(\vec{d2}) =_1 signe(\vec{(d1)}) =_1 -$. Dès lors, $\lessgtr$ est transitive.

$\lessgtr$ est totale $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \in Imf^2, (\vec{d1} \lessgtr \vec{d2}) ou (\vec{d2} \lessgtr \vec{d1})$

Deux vecteurs qui ont des signes distincts sont automatiquement en relation. Il reste à considérer le cas où les vecteurs ont le même signe, ce qui donne une condition nécessaire et suffisante : $\forall e, e' \in \mathbb{E}^2, \exists e'' \in \mathbb{E}, (e + e'' = e')$ ou $(e' + e'' = e)$. (i.e. $\leq$ est totale sur $\mathbb{E}$). Une autre CNS est une condition vide car les équivalences établies lorsque nous avons traité le cas "$\bigoplus$ est interne" donnaient déjà des conditions plus fortes
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve Triviale

Compatibilité de $\lessgtr$ avec $\bigoplus$ $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3, (\vec{d1} \lessgtr \vec{d2}) \Rightarrow (\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lessgtr \vec{d2} \bigoplus \vec{d3})$

Aucune condition à ajouter. A noter qu'il est relativement intuitif que la réorganisation libre des extensions (associativité, commutativité) permet d'obtenir un tel résultat.
(Aucune nouvelle condition ne doit être ajoutée)

Preuve Montrons que les conditions précédentes sont déjà suffisantes. Soient $\vec{d1} = (e_1, \theta_1, \sigma_1), \vec{d2} = (e_2, \theta_1, \sigma_2)$, $\vec{d3} = (e_3, \theta_1, \sigma_3) \in Imf^3$ tels que $\vec{d1} \lesssim \vec{d2}$. Si $\vec{d3} = \vec{0}$, la propriété est évidemment vraie. Si $\vec{d1}$=$\vec{d2}$ aussi. Supposons $\vec{d1} \neq \vec{d2}$. Supposons d'abord $signe(\vec{d1}) = signe(\vec{d2}) = signe(\vec{d3}) \neq +-$. Avec le signe commun égal à +, la comparaison donne : $\exists e', e_1 + e' = e_2$ ($e_1 \leq e_2$). Dès lors, en ajoutant e_3 de chaque côté de l'égalité, par associativité et commutativité de +, $\exists e', (e_1 + e_3) + e' = (e_2 + e_3)$. Donc ($\vec{d1} + \vec{d3} \lesssim \vec{d2} + \vec{d3}$)). Supposons maintenant que signe($\vec{d3}$) = - (avec toujours signe($\vec{d1}$) = +, signe($\vec{d2}$) = +). Soit e3 $\leq$ e1, e3 $\leq$ e2, soit e1 $\leq$ e3, e3 $\leq$ e2, soit e1 $\leq$ e3, e2$\leq$ e3 (le cas e3 $\leq$ e1, e2 $\leq$ e3 est exclu car par transitivité de $\leq$ cela donnerait e2 $\leq$ e1 (et donc $e_1 = e_2$ car $e_1 \leq e_2$ et $\leq$ antisymétrique) ce qui est absurde car on a supposé $\vec{d1} \neq \vec{d2}$). Dans le premier cas (e3 $\leq$ e1, e3 $\leq$ e2), $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 - e3, \theta_1, +)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 - e3, \theta_1, +)$. Par l'absurde, supposons e2-e3 $\leq$ e1-e3. Dans ce cas, ($\exists e'$ e2-e3 + e' = e1 -e3). Dès lors, par commutativité et associativité, $\exists e', (e2 - e3 + e3) + e' = (e1 - e3 + e3)$, i.e. e2 + e' = e1 i.e e2 $\leq$ e1. C'est absurde car on a supposé $\vec{d1} \neq \vec{d2}$. Dès lors, e1-e3 $\leq$ e2 - e3. Par suite, ($\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$)). Dans le second cas (e1 $\leq$ e3, e3 $\leq$ e2), $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e1, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 - e3, \theta_1, +)$. Dès lors, par comparaison des signes, on a directement ($\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$)). Dans le dernier cas (e1 $\leq$ e3, e2$\leq$ e3), $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e1, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e2, \theta_1, -)$. On a : e1 + (e3 - e2) + (e2 - e1) = e3. Dès lors, (e3 - e2) + (e2 - e1) = e3 - e1. Donc, $\exists e', e3 - e2 + e' = e3 - e1$. Dès lors, e3 - e2 $\leq$ e3-e1, puis ($\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$)). De même si nous aurions pris comme signe commun de $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ le signe -. Supposons maintenant que $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ ont deux signes strictement différents. Nécessairement, $\vec{d1}$ = - , $\vec{d2}$ = +. Soit e3 $\leq$ e1 et e3 $\leq$ e2, soit e1 $\leq$ e3 et e3 $\leq$ e2, soit e3 $\leq$ e1 et e2$\leq$ e3, e1 $\leq$ e3 et e2$\leq$ e3, . Si e3 $\leq$ e1, e3 $\leq$ e2, alors $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 - e3, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 - e3, \theta_1, +)$. Donc, ($\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$)) (par comparaison du signe). Si, e1 $\leq$ e3, e3 $\leq$ e2, soit $\sigma_3 = +$, soit $\sigma_3 = -$. Si $\sigma_3 = +$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e1, \theta_1, +)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 + e3, \theta_1, +)$. On a : (e3 - e1) + e1 + e2 = e2 + e3. Dès lors, $\exists e'' \in \mathbb{E}, (e3 - e1) + e'' = e2 + e3$. On en déduit e3-e1 $\leq$ e2 + e3 puis $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$. Si $\sigma_3 = -$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 + e3, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 - e3, \theta_1, +)$. Donc, ($\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$)) (par comparaison du signe). Si e3 $\leq$ e1 et e2$\leq$ e3, soit $\sigma_3 = +$, soit $\sigma_3 = -$. Si $\sigma_3 = +$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 - e3, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e3 + e2, \theta_1, +)$. Donc, ($\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$)) (par comparaison du signe). Si σ_3 = -, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 + e1, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e2, \theta_1, -)$. On a : (e3 - e2) + e2 + e1 = e3 + e1. Dès lors, $\exists e'' \in \mathbb{E}, (e3 - e2) + e'' = e3 + e1$. On en déduit e3-e2 $\leq$ e3 + e1 puis $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$. Si e1 $\leq$ e3 et e2$\leq$ e3, soit $\sigma_3 = +$, soit $\sigma_3 = -$. Si $\sigma_3 = +$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e1, \theta_1, +)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e2 + e3, \theta_1, +)$. On a : (e3 - e1) + e1 + e2 = e2 + e3. Dès lors, $\exists e'' \in \mathbb{E}, (e3 - e1) + e'' = e2 + e3$. On en déduit e3-e1 $\leq$ e2 + e3 puis $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$.Si $\sigma_3 = -$, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} = (e1 + e3, \theta_1, -)$, $\vec{d2} \bigoplus \vec{d3} = (e3 - e2, \theta_1, -)$. On a : (e3 - e2) + e2 + e1 = e1 + e3. Dès lors, $\exists e'' \in \mathbb{E}, (e3 - e2) + e'' = e1 + e3$. On en déduit e3-e2 $\leq$ e1 + e3 puis $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$.
Il reste à traiter le cas où $\vec{d1}$ ou $\vec{d2}$ est nul, qui est aussi immédiat qu'on peut le penser. Dans tous les cas, $\vec{d1} \bigoplus \vec{d3} \lesssim \vec{d2} \bigoplus \vec{d3}$. Nous avons donc montré la compatibilité de $\lesssim$ avec $\bigoplus$ sans hypothèse supplémentaire.

Archimédien

Archimédien $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \gtrsim 0, \vec{d1} \neq \vec{0} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \vec{d2} \lesssim n\vec{d1}$.
(Prenons deux points P1 et P2 strictement à droite de l'origine. Il est toujours possible d'ajouter le vecteur du point P1 à lui-même de manière réitérée de façon à dépasser le point P2)

La condition nécessaire et suffisante est : $\forall e, e', \in \mathbb{E}^2, e' \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, e \leq ne'$.
(En ajoutant une extension non nulle à elle-même de manière réitérée, il est possible de la rendre plus grande que n'importe quelle extension)

Remarque : pour tout couple d'extensions non nulles, les ensembles obtenus en les joignant chacune à elles-mêmes s'encadrent l'un et l'autre.

Preuve Immédiate car les vecteurs de la propriété ont tous un signe positif au sens large. Par suite, l'addition des nombres transfère ses propriétés de manière transparente à l'addition des extensions.

Etude des axiomes relatifs à $+, \times et \leq$ restants

Passons maintenant à l'étude des axiomes relatifs à la multiplication restants.

Représentation de $\times \in \mathbb{S}^{\mathbb{S}\times\mathbb{S}}$ Nous supposons toujours que le signe est conservé. La multiplication des signes est donc décrite par la loi de composition interne $\times_{\mathbb{S}}$. Le signe est par suite représenté par le fait que le signe conserve, modifie en l'opposé ou rend nul les signes.

Groupe (abélien) selon ($\otimes$, $\vec{1}$) avec $\vec{1} \neq \vec{0}$

$\otimes$ est commutative $\forall \vec{d1}, \vec{d2} \in Imf^2, \vec{d1} \otimes \vec{d2} = \vec{d2} \otimes \vec{d1}$

CNS = $\times_{\mathbb{E}}$ est commutative.

Il existe $\vec{1}$ neutre pour $\otimes$ tel que $\vec{1} \neq \vec{0}$ $\forall \vec{d1} \in Imf, \vec{d1} \otimes \vec{1} = \vec{1} \otimes \vec{d1} = \vec{d1}$

CNS = $\times_{\mathbb{E}}$ admet un élément neutre 1 dans $\mathbb{E}\backslash\{0\}$

Remarque : finalement $f(1) = (1, \theta 1, +)$

$\otimes$ est interne (ou principe d'homogénéisation)

$$\forall \vec{d_1}, \vec{d_2} \in Imf^2, \exists! \vec{d_3} \in Imf, \vec{d_1} \otimes \vec{d_2} = \vec{d_3}$$

CNS : $\times_{\mathbb{E}}$ est interne

$\otimes$ est associative $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3$, $\vec{d1} \otimes (\vec{d2} \otimes \vec{d3}) = (\vec{d1} \otimes \vec{d2}) \otimes \vec{d3}$.

CNS : $\times_{\mathbb{E}}$ est associative.

Un élément non nul admet un inverse $\forall \vec{d1} \in Imf\backslash\{\vec{0}\}, \exists \vec{d2} \in Imf, \vec{d1} \otimes \vec{d2} = \vec{d2} \otimes \vec{d1} = \vec{1}$. Si un tel $\vec{d2}$ convient, il peut être noté $\vec{d1}^{-1}$

CNS : toute extension e $\in \mathbb{E}\backslash\{0\}$ admet un élément symétrique pour $\times$ dans $\mathbb{E}$. Notons le $\frac{1}{e}$.

Remarque : en considérant le signe, on a finalement $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f(x^{-1}) = (\frac{1}{extension(f(x))}, \theta 1, signe(f(x)))$

Distributivité et compatibilité

$\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$ $\forall \vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3} \in Imf^3, (\vec{d1} \oplus \vec{d2}) \otimes \vec{d3} = (\vec{d1} \otimes \vec{d3}) \oplus (\vec{d2} \otimes \vec{d3})$

CNS : $\times_{\mathbb{E}}$ est distributive par rapport à $+_{\mathbb{E}}$.

Preuve Supposons que $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathbb{R}$. Alors par morphisme, $\otimes$ l'est par rapport à $\bigoplus$. Soient trois extensions e1,e2,e3. Si au moins l'une d'entre elle est nulle, alors $(e1 + e2) \times e3 = e1 \times e3 + e2 \times e3$ trivialement (il suffit de justifier e $\times$ 0 = 0 par la conservation du signe). Sinon, prenons ces extensions dans des vecteurs $\vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3}$ non nuls de même signe positif + . Puisque $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \otimes \vec{d3} = (\vec{d1} \otimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \otimes \vec{d3})$, alors $(e1 + e2) \times e3 = e1 \times e3 + e2 \times e3$ par égalité sur la première composante. Donc $\times$ est distributive par rapport à + dans $\mathbb{E}$.

Réciproquement, supposons $\times$ est distributive par rapport à + dans $\mathbb{E}$. Soient trois nombres $\vec{d1}, \vec{d2}, \vec{d3}$.Si au moins l'un d'entre eux est nul $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \otimes \vec{d3} = (\vec{d1} \otimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \otimes \vec{d3})$. Sinon, soit $\vec{d1}$ et $\vec{d2}$ ont le même signe, soit leurs signes sont distincts. Si leurs signes sont les mêmes, $(e1 + e2) \times e3 = e1 \times e3 + e2 \times e3$ assure $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \otimes \vec{d3} = (\vec{d1} \otimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \otimes \vec{d3})$ d'après la première disjonction de cas de $\bigoplus$. Sinon, prenons signe($\vec{d1}$)=+ et signe($\vec{d2}$)=-. Soit e1=e2, soit e1 $<$ e2, soit e2 $<$ e1. Si e1=e2, signe($\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}$) = +-, puis $signe((\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \otimes \vec{d3}) = +-$. Comme +- n'est associé qu'à $\vec{0}$, $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \otimes \vec{d3} = \vec{0}$. Puisque $\vec{d1} \otimes \vec{d3}$ et $\vec{d2} \otimes \vec{d3}$ ont la même extension $(e1 \times e3)$ et des signes opposés quoi que soit $\vec{d3}$, alors $\vec{d1} \otimes \vec{d3}$ est l'opposé de $\vec{d2} \otimes \vec{d3}$ et leur somme est nulle. Finalement, $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \otimes \vec{d3} = (\vec{d1} \otimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \otimes \vec{d3}) = \vec{0}$. Si e2 $<$ e1, alors $\exists e_{1-2} \in \mathbb{E} \backslash \{0\}, e2 + e_{1-2} = e1$. $((\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \otimes \vec{d3}) = (e_{1-2} \times e3, \theta1, + \times signe(\vec{d3}))$. De plus, $(\vec{d1} \otimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \otimes \vec{d3})$ $= (e1 \times e3, \theta1, signe(\vec{d3})) \bigoplus (e2 \times e3, \theta1, oppos\acute{e}(signe(\vec{d3})))$. Or, du fait de la distributivité de $\times$ par rapport à +, $(e2 + e_{1-2}) \times e3 = e1 \times e3$ donne $(e2 \times e3) + (e_{1-2} \times e3) = e1 \times e3$, donc $(e2 \times e3) \leq e1 \times e3$ et $(e2 \times e3) - (e1 \times e3) = (e_{1-2} \times e3)$. D'où, $(\vec{d1} \bigoplus \vec{d2}) \otimes \vec{d3} = (\vec{d1} \otimes \vec{d3}) \bigoplus (\vec{d2} \otimes \vec{d3}) = (e_{1-2} \times e3, \theta1, signe(\vec{d3}))$. Nous raisonnons de manière analogue dans le cas où e1 $<$ e2. Par commutativité de $\bigoplus$, le cas où signe($\vec{d1}$)=- et signe($\vec{d2}$)=+ est également traité. D'où distributivité de $\otimes$ par rapport à $\bigoplus$ dans tous les cas.

Tous les axiomes des nombres réels ont été traités et prouvés à partir des propositions sur les composantes. Les axiomes des nombres décomposés reconstruisent donc le corps totalement ordonné archimédien et complet des nombres réels.

A.3 Annexe - Représentation non usuelles des fonctions

Représentation non injective du plan achevé

Des représentations du plan achevé peuvent être obtenues sans unicité des points vers lesquels divergent les fonctions ou vers lesquels elles convergent en $\pm\infty$. Par exemple, appliquons la transformation au plan : $(r, \theta) \to (arctan(r), \theta)$. La représentation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est injective (tout point de $\mathbb{R}^2$ est associé à un unique point du plan). Cependant, en prolongeant par continuité, la représentation de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ n'est pas injective. Dans la figure qui suit, L correspond à un élément quelconque de $\mathbb{R}$.

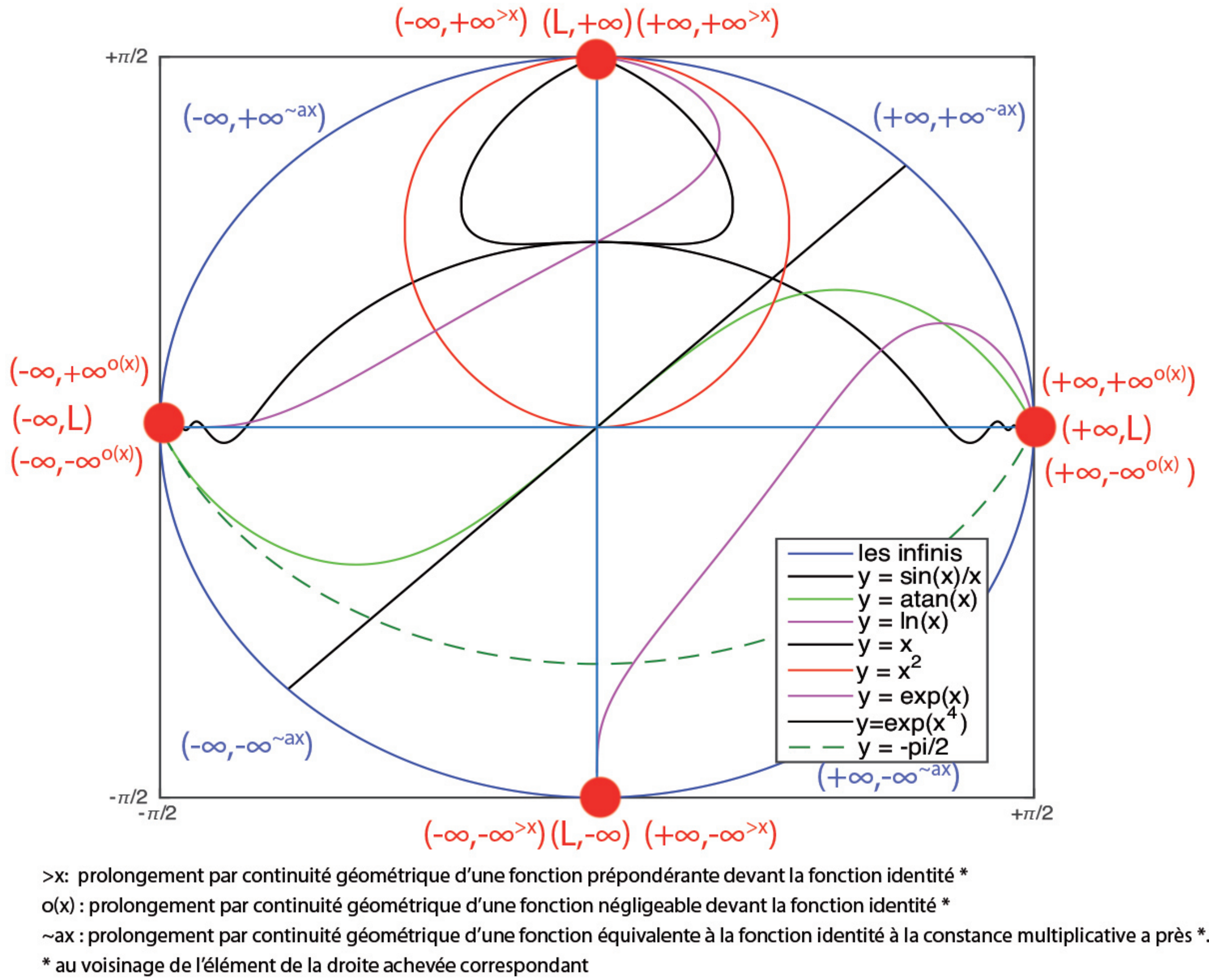

FIGURE A.1 – Représentation du plan achevé par $(r, \theta) \rightarrow (arctan(r), \theta)$ et méthode de prolongement par continuité

Comparaison asymptotique

Equivalence entre dérivabilité et comparaison par rapport aux fonctions affines D'une manière générale, la dérivabilité d'une fonction f (à gauche, à droite, les deux) en a correspond au fait que f est équivalente à une fonction affine.

$$\exists L, lim_{x \rightarrow x0, x<x0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x0} = L \Leftrightarrow \exists L, f(x) - f(x0) \sim_{x0^-} L(x - x0)$$
$$\exists L, lim_{x \rightarrow x0, x>x0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x0} = L \Leftrightarrow \exists L, f(x) - f(x0) \sim_{x0^+} L(x - x0)$$
$$\exists L, lim_{x \rightarrow x0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x0} = L \Leftrightarrow \exists L, f(x) - f(x0) \sim_{x0} L(x - x0)$$

De plus (sans distinguer les dérivées à gauche ou à droite par simplicité), la divergence du taux d'accroissement (vers -∞ ou +∞) correspond à la négligeabilité de f devant une fonction affine, et une dérivée nulle à la prépondérance de f devant une fonction affine :

$$f \ non \ dérivable \ en \ x0 \ (par \ divergence \ du \ taux \ d' \ accroissement \ vers \ + \infty \ ou \ - \infty)$$
$$\Leftrightarrow (x - x0) = o_{x0}(f(x) - f(x0))$$

$$f \ dérivable \ en \ x0 \ et \ f'(x0) = 0 \ \Leftrightarrow (f(x) - f(x0)) = o_{x0}(x - x0)$$

Dérivabilité en $+\infty$: cas de (arctan, arctan) Dans (arctan,arctan), les fonctions usuelles paraissaient en $(+\infty,+\infty)$ selon : dérivables de dérivée non nulle (exemple : la fonction identité), dérivables de dérivée nulle (exemple : la fonction exponentielle) ou non dérivables par divergence du taux d'accroissement (vers $+\infty$ ou $-\infty$) (exemple : le logarithme népérien). La disjonction de cas correspond également à celle des fonctions équivalentes à une constante multiplicative près à la fonction identité, prépondérante devant la fonction identité ou négligeable devant la fonction identité ($en+\infty$). Est-ce que le lien entre l'aspect dérivable et les comparaisons par rapport aux fonctions affines est attendu ? Prolongeons les graphes par continuité géométrique en $(+\infty,+\infty)$ et étudions la dérivabilité géométrique.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $arctan(f(x)) + arctan(\frac{1}{f(x)}) = signe(x) \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$arctan(f(x)) = \frac{\pi}{2} - arctan(\frac{1}{f(x)})$$

,
si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$, d'où (developpement limité) :

$$arctan(f(x)) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{f(x)} + o_{x\to+\infty}(\frac{1}{f(x)})$$

la dérivée géométrique du graphe en $(+\infty,+\infty)$ s'écrit :

$$lim_{u\to+\infty}(Graphe) = lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - arctan(f(x))}{\frac{\pi}{2} - arctan(x)}$$

or :

$$\frac{\frac{\pi}{2} - arctan(f(x))}{\frac{\pi}{2} - arctan(x)} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{f(x)} + o_{x\to+\infty}(\frac{1}{f(x)}))}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} + o_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})} = \frac{\frac{1}{f(x)} + o_{x\to+\infty}(\frac{1}{f(x)}))}{\frac{1}{x} + o_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})}$$

$$= \frac{x}{f(x)} \times \frac{1 + o_{x\to+\infty}(1)}{1 + o_{x\to+\infty}(1)} = \frac{x}{f(x)}a(x)$$

avec $lim_{x\to+\infty}a(x) = 1$

On en déduit : soit f une fonction divergeant vers $(+\infty,+\infty)$, définie au voisinage de $+\infty$.

f est prépondérante devant id : $x \to x$ en $+\infty$ ssi sa dérivée première à gauche de $+\infty$ au sens de (arctan, arctan) est égale à 0.

f est négligeable devant id en $+\infty$ ssi elle n'admet pas de dérivée à gauche de $+\infty$ par divergence du taux d'accroissement vers $+\infty$ ou $-\infty$ au sens de (arctan, arctan) .

f est équivalente à la constante multiplicative a près à id en $+\infty$ ssi sa dérivée à gauche de $+\infty$ au sens de (arctan, arctan) est égale à a.

Dès lors, la lecture des dérivées des fonctions usuelles en $(+\infty,+\infty)$ était valable, et elle traduisait une comparaison asymptotique des fonctions par rapport à la fonction identité.

Remarque : il est clair que pour définir la dérivée en $+\infty$, il a d'abord fallu prolonger le graphe par continuité. De plus, "au sens de" signifie que la dérivée est comprise de manière géométrique, et donc "au sens" de l'aspect défini dans la représentation usuelle i.e., analytiquement, avec la dérivée classique sur la fonction usuelle-équivalente prolongée par continuité en $(lim_{x\to+\infty}u(x), lim_{x\to+\infty}u(x))$ (ici $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$). Les fonctions d'aspect affine qui font office de tangentes sont les fonctions $x \to tan(arctan(x)a + \frac{\pi}{2}(1-a))$ ou a est le coefficient directeur vérifiant nécessairement a > 0.